Die Darstellung willkürlicher Funktionen in Anwendung auf die Statistik.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Hermann Friz
aus Crailsheim.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1908.

Von der Fakultät angenommen den 3. August 1908.

Meinem lieben Großvater.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

Erstes Kapitel.

Die Eigenschaften der Weierstraßschen Funktion F(x, k) . 12

§ 1. Die Weierstraßsche Funktion F(x, k) als Augleichsfunktion . 13

§ 2. Näherungsweise Darstellungen des Integrals F(x, k) durch eine Summe 16

§ 3. Die Vergleichung der Mittelwerte aus den Ordinaten der gegebenen und der ausgeglichenen Funktion 21

§ 4. Die speziellen Fälle, für die das Integral F(x, k) ausführbar ist 25

Zweites Kapitel.

Die Zerlegung der aus einer Massenbeobachtung gewonnenen Funktion in eine analytische und in eine oszillatorische Funktion 28

§ 5. Die arithmetische Reihe als Näherungsreihe 30

§ 6. Die geometrische Reihe als Näherungsreihe 35

§ 7. Die Näherungsreihe, deren Glieder, reziprok genommen, eine arithmetische Reihe bilden 35

Drittes Kapitel.

Anwendung auf die Aufgabe der Ausgleichung statistischer Tabellen 36

§ 8. Die näherungsweise Berechnung des Integrals F(x, k) . . . 38

§ 9. Rechnungsdaten und weitere Relationen für die Hermiteschen Polynome 40

§ 10. Die Ausgleichsformeln unter Zugrundelegung der ganzen rationalen Funktion als Interpolationsfunktion 46

Viertes Kapitel.

Die näherungweise Darstellung einer aus einer Massenbeobachtung gewonnenen Funktion durch eine analytische Funktion 54

§ 11. Die Entwicklung der Funktion F(x, k) nach Hermiteschen Polynomen 56

§ 12. Die Entwicklung der Funktion F(x, k) nach trigonometrischen Funktionen 64

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547017_0141

Einleitung.

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Darstellung willkürlicher Funktionen durch analytische Funktionen, denen die Eigenschaft zukommt, daß die Durchschnittswerte bestimmter Intervalle mit den entsprechenden Durchschnittswerten der gegebenen Funktion näherungsweise übereinstimmen.

Über die willkürlichen Funktionen werde nur eine Voraussetzung gemacht, nämlich die, daß sie auf statistischem Wege durch die Beobachtung einer Massenerscheinung gewonnen worden sei.

Von der Massenerscheinung setzen wir voraus, daß sie ein allgemeines wissenschaftliches Interesse biete; das soll heißen, daß ihr ein in seinen Wirkungen nahezu konstanter Ursachenkomplex zugrunde liege, woraus für die Funktion selbst zu folgern ist, daß die Kurve, die sie darstellt, für Erhebungen an verschiedenem Material und zu verschiedenen Zeitepochen in groben Umrissen immer wieder dasselbe Bild zeigt.

Beispiele dieser Art sind die bekannten, auf das menschliche Leben bezüglichen Massenerscheinungen, wobei in erster Linie die Invaliditäts- und Absterbeordnungen zu nennen sind.

Eine analytische Funktion von der geforderten Eigenschaft ist die Weierstraßsche Funktion

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

die Weierstraß — allerdings in einer weiter unten zur Sprache kommenden Verallgemeinerung — seiner Abhandlung: Über die analytische Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen reeller Argumente[1]) zugrunde gelegt hat.

[1]) Weierstraß, Werke II, 1 S. 1—37.

Auf diese Funktion wird sich die vorliegende Theorie im wesentlichen aufbauen.

Im folgenden soll auf die Eigentümlichkeiten hingewiesen werden, die wir der vorgelegten Funktion f(u) zuschreiben, wenn wir annehmen, sie sei aus der Beobachtung einer Massenerscheinung hervorgegangen.

Der einfacheren Ausdrucksweise halber knüpfen wir die nun folgenden Betrachtungen an das spezielle und zugleich wichtigste Beispiel dieser Art, nämlich an die Sterblichkeitskurve an. Auf andere Beispiele findet das hier Gesagte sinngemäße Anwendung.

Um eine Sterblichkeitskurve zu erhalten, denken wir uns eine Grundmasse gleichzeitig, etwa in einem Kalenderjahr, Geborener bis zu ihrem allmählichen Absterben beobachtet. Unter der Sterbenswahrscheinlichkeit der x jährigen wollen wir dann einen Bruch verstehen, dessen Nenner gleich der Zahl der Personen der Grundmasse ist, die ihren x ten Geburtstag erleben und dessen Zähler diejenigen unter ihnen angibt, die im Laufe ihres $(x + 1)$ ten Lebensjahres sterben.[1]) Hierdurch gelangen wir zu einer Wertereihe; die einzelnen Werte dieser Reihe wollen wir in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Ordinaten mit den zugehörigen Lebensjahren als Abszissen eintragen. Gibt man noch ein Verfahren an, um zwischen den gegebenen äquidistanten Ordinaten eindeutig zu interpolieren, so gelangt man von der ursprünglich gegebenen Wertereihe zu einem stetigen Kurvenzug. Deshalb können wir unseren Betrachtungen auch eine gegebene Kurve oder Funktion anstatt einer Wertereihe zugrunde legen.

Eine jede solche Kurve besitzt nun die allgemeine Eigenschaft, näherungsweise durch eine stetige Kurve darstellbar zu sein, die für kleinere Intervalle dem gesetzmäßigen Verlauf einer

---

[1]) Für die Praxis ist aus naheliegenden Gründen diese Methode nicht geeignet (s. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Lpz. 1903, 2. Abschn. § 1). Nun aber bestehen die Betrachtungen ganz allgemeiner Natur, die wir gemäß obiger Definition an die Sterblichkeitskurve knüpfen, ganz unverändert weiter, wenn wir auch die der Praxis der Sterblichkeitsmessung entnommenen komplizierteren Definitionen heranziehen.

einfachen analytischen Funktion sich anpaßt. Diese ruhig verlaufende normale Sterblichkeitskurve ist so anzunehmen, daß man durch Superposition einer sogen. oszillatorischen Kurve, der Restkurve, zu der vorgelegten Kurve gelangt. Unter einer oszillatorischen Kurve verstehen wir eine solche, für die sich eine bestimmte Intervallänge, die einen Teil des Gesamtintervalls ausmacht, finden läßt derart, daß erstens in jedem Intervall von dieser Länge die Kurve mindestens eine gewisse Zahl mal von positiven zu negativen Ordinaten übergeht, und daß zweitens die Maximalschwankung für das Gesamtintervall nicht größer ist als die größte der Maximalschwankungen in irgendeinem Intervall von dieser Länge. Diese Definition können wir auch ohne weiteres auf oszillatorische Wertereihen übertragen. Unter der Maximalschwankung eines bestimmten Intervalls verstehen wir dann den absoluten Betrag der Differenz zwischen der größten und der kleinsten Ordinate in diesem Intervall.

Allgemein gesprochen erklärt sich dies Verhalten der Restkurve neben andern Ursachen daraus, daß die einzelnen Werte der vorgelegten Reihe nicht unabhängig voneinander sind, d. h. daß der Wert für die Sterblichkeit irgendeiner Jahresklasse abhängt von den vorausgehenden Werten für die früheren Altersklassen. Es gibt Jahresklassen, wo die Sterblichkeit den normalen Wert merklich übertrifft, dafür treten in benachbarten Altersklassen unternormale Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten auf, so daß die vorgelegte Kurve bald oberhalb, bald unterhalb der normalen Sterblichkeitskurve verlaufen wird. Die oben definierte normale Sterblichkeitskurve, die keineswegs eindeutig definiert ist, ändert sich innerhalb enger Grenzen, selbst wenn sie eindeutig definiert wäre, von einem statistischen Problem zum andern. Im besonderen sind diese Schwankungen um die normalen Werte auf die Eigentümlichkeiten der Beobachtung an und für sich zurückzuführen. Die Maximal- und Minimalstellen der Restkurve werden sich verschieben, wenn wir die Sterbenswahrscheinlichkeit der x jährigen anders definieren, etwa so, daß wir darunter einen Bruch verstehen, dessen Nenner die Zahl derjenigen Personen angibt, die $x - {}^1/_2$ Jahre alt werden und dessen Zähler die Zahl derer angibt, die im Alter von $x - {}^1/_2$ bis $x + {}^1/_2$ Jahren verstorben sind.

Ferner ist für die Stärke der Schwankungen in hohem Grade maßgebend, wie groß wir die Zeitintervalle wählen, für die die Erhebungen gemacht werden, ob wir also die Sterblichkeit nach Jahresklassen, Halbjahresklassen, Monaten usw. berechnen. Qualität wie Quantität der Schwankungen hängen endlich nicht unwesentlich von der Zahl der unter Beobachtung stehenden Individuen, also von der Größe der Beobachtungsgrundlagen ab.

Nachdem wir nun die besonderen Eigenschaften unserer willkürlichen Funktion f(u) kennen gelernt haben, sehen wir uns vor zwei Aufgaben gestellt, erstens die oben besprochene ruhig verlaufende Näherungskurve zu finden, zweitens die oszillatorische Restkurve näherungsweise durch eine analytische Funktion zu ersetzen.

Zur Lösung der ersten Aufgabe könnten wir uns irgend einer der bereits existierenden Näherungsfunktionen bedienen.[1]) Wir wollen indes, der Allgemeinheit halber, von diesem Hilfsmittel keinen Gebrauch machen, sondern ein von der speziellen Natur des Problems unabhängiges Verfahren einschlagen.

Zur Lösung der zweiten Aufgabe bedienen wir uns der oben angeführten Weierstraßschen Funktion F(x, k).

Diese Aufgabe wird um so leichter zu lösen sein, d. h. die Näherungsfunktion wird um so einfacher ausfallen, je kleiner einerseits die darzustellenden Intervalle und je größer andrerseits die Intervalle sind, deren Durchschnittswerte angenähert mit den analogen Durchschnittswerten der vorgelegten Funktion übereinstimmen sollen.

Was die Größe des darzustellenden Intervalls anlangt, so kann sie durch Teilung des Gesamtintervalls beliebig verkleinert werden — es gelten eben dann für die einzelnen Teile verschiedene analytische Funktionen —. Was die Größe der Intervalle anbelangt, deren Durchschnittswerte mit den entsprechenden der vorgelegten Funktion angenähert übereinstimmen sollen, so entscheidet hierüber einerseits der Grad dieser Annäherung, andrerseits die Gestalt der vorgelegten Kurve und die Größe

[1]) s. Czuber II, 197.

des Parameters k. Eine für die Praxis geeignete Formel, die diese Daten in eine einfache Beziehung zueinander bringt, läßt sich, wie mir scheint (§ 3), nicht aufstellen. Man wird sich indes ein ungefähres Urteil über den Grad dieser Annäherung bei einem vorgelegten Material und bestimmter Wahl des Parameters k stets bilden können, es bliebe eben durch eine nachträgliche Probe die genaue Bestimmung der Werte dieser Annäherung zu ermitteln übrig.

Etwas einfacher wird sich die Lösung der Aufgabe dann ergeben, wenn keine analytische Darstellung, sondern nur eine Abgleichung der gegebenen diskreten Ordinaten für sich ohne eine Interpolation der Zwischenwerte verlangt wird. Mit dieser Aufgabe der Tafelausgleichung wollen wir uns gleichfalls, und zwar in einem besonderen Kapitel beschäftigen.

In einem ersten Kapitel soll zunächst auf die Eigenschaften der Weierstraßschen Funktion, besonders als Ausgleichsfunktion, hingewiesen werden. Im zweiten Kapitel folgt ein einfaches, den Zwecken der Praxis angepaßtes Verfahren zur Gewinnung einer ersten Näherungsfunktion für die vorgelegte Funktion f(u) von der oben beschriebenen Beschaffenheit. Das dritte Kapitel enthält den Beitrag zur Tafelausgleichung. Es wird sich zeigen, daß die Weierstraßsche Funktion praktisch sehr brauchbare Ausgleichsformeln zu liefern imstande ist; nur sollte die diese Formeln enthaltende Tabelle erweitert werden, eine Forderung, der ich wegen der damit verbundenen mühsamen numerischen Berechnungen nicht nachgekommen bin. Das vierte Kapitel endlich beschäftigt sich mit der näherungsweisen Darstellung der oszillatorischen Restkurve durch eine analytische Funktion. Es ist die Darstellung durch trigonometrische Funktionen, die sich am besten eignet; eine andere Darstellung durch Hermitesche Polynome erweist sich weniger vorteilhaft, dagegen glaube ich durch diese Darstellung eine brauchbare Interpolationsformel gefunden zu haben sowie ein bemerkenswertes Verfahren, eine willkürliche Funktion durch eine ganze rationale Funktion zu approximieren.

Erstes Kapitel.

Die Eigenschaften der Weierstraßschen Funktion F(x, k).

Wir gehen aus von einer Wertereihe

(1) $$f_{x_0-nh},\ f_{x_0-(n-1)h},\cdots f_{x_0-h},\ f_{x_0},\ f_{x_0+h},\cdots f_{x_0+nh}$$

wie sie uns eine (unausgeglichene) Sterblichkeitstabelle liefert. Mit andern Worten, wir setzen von ihr die in der Einleitung definierten Eigentümlichkeiten voraus.

Die Aufgabe sei, diese Wertereihe so abzuändern — der technische Ausdruck dafür ist „ausgleichen“ —, daß die abgeänderte Reihe

(2) $$F_{x_0-nh},\ F_{x_0-(n-1)h},\cdots F_{x_0-h},\ F_{x_0},\ F_{x_0+h},\cdots F_{x_0+nh}$$

folgende Eigenschaften besitzt:

1. daß sie einen ruhigeren, d. h. mit weniger Schwankungen (Wendepunkten) versehenen Verlauf wie die gegebene Reihe (1) zeigt;

2. daß die algebraische Summe der Abänderungen

$$F_{x_0+\nu h} - f_{x_0+\nu h} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm n)$$

für ein jedes beliebig herausgegriffene Intervall von bestimmter Länge, dem absoluten Wert nach genommen, eine feste obere Grenze nicht übersteigt.

Diese beiden Bedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Die Bedingung 2 läßt sich immer erfüllen — wir dürfen ja nur die Abänderung jeder einzelnen Ordinate klein genug machen —; die Güte der Ausgleichung hängt aber wesentlich davon ab, inwieweit bei Erfüllung der Bedingung 2. zugleich auch der Bedingung 1 genügt wird.

Daß dabei der Charakter der gegebenen Funktion eine Hauptrolle spielt, d. h. daß es die in der Einleitung definierten

sogen. oszillatorischen Funktionen bezw. Wertereihen sind, auf die allein die Ausgleichung anzuwenden ist, werden wir in § 2 mit Hilfe einer näherungsweisen Darstellung des Integrals F(x, k) einsehen.

Die mathematische Verfolgung der Bedingung 2 in § 1 wird uns zum Weierstraßschen Integral F(x, k) in seiner allgemeineren Form führen.

§ 1.

Die Weierstraßsche Funktion F(x, k) als Ausgleichsfunktion.

Es handelt sich darum, eine mathematische Formel anzugeben, nach der jeder Wert der Reihe (2) aus einem Teil oder sämtlichen Werten der Reihe (1) auf eindeutige Weise abgeleitet werden kann, so daß die Reihe (2) den oben geforderten Bedingungen 1 und 2 genügt. Wir setzen

$$(3)\quad F_{x_0} = A_0 f_{x_0} + A_1(f_{x_0+h} + f_{x_0-h}) + A_2(f_{x_0+2h} + f_{x_0-2h}) + \cdots,$$

supponieren also einen linearen Zusammenhang zwischen F_{x_0} und den Werten der gegebenen Reihe (1). Die Zahl der Glieder der Reihe (3) lassen wir vorerst noch unbestimmt, dagegen haben wir die Bestimmung getroffen, daß gleich weit von der auszugleichenden Ordinate f_{x_0} abstehenden Ordinaten $f_{x_0+\nu h}$ und $f_{x_0-\nu h}$ gleiche positive Koeffizienten $A_\nu (\nu = 1, 2, \cdots)$ zukommen. Die Werte der Reihe (1) denken wir uns nämlich wieder in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Ordinaten eingetragen, wobei die angefügten Indizes die zugehörigen Abszissen bedeuten.

Die Bedingung 2 erfordert nun, wie eine einfache Überlegung zeigt, daß die Summe der Koeffizienten

$$A_0 + 2A_1 + 2A_2 + \cdots = 1$$

sich ergebe. Wir treffen eine weitere Festsetzung, wenn wir bestimmen, daß die Koeffizienten $A_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ mit wachsendem Index abnehmen.

Alle die bisher gemachten Annahmen über die Koeffizienten A_i sind nicht willkürlich, sondern entsprechen der Natur der

Sache. Wohl aber würde jede Einschränkung der Anzahl dieser Koeffizienten eine Willkür in sich einschließen.[1])

Die Reihe (3) setzen wir also als eine unendliche voraus, deren Koeffizienten $A_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ eine absolut konvergente Reihe mit der Reihensumme

$$A_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} A_i = 1$$

darstellen. Solche konvergente Reihen existieren in großer Mannigfaltigkeit; ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal wird der Grad ihrer Konvergenz bilden.

Den Koeffizienten $A_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots)$ in der Gleichung (3) können wir auch die Bedeutung von Gewichten beilegen, deren Summe sich immer gleich Eins ergibt.

Nunmehr machen wir den Grenzübergang zu $h = 0$, nehmen also statt einer vorgelegten Wertereihe (1) eine stetig verlaufende Kurve $f(x)$ an und denken uns den Ausgleichswert F_{x_0} nicht nur abhängig von einzelnen diskreten Ordinaten $f_{x_0 + \nu h}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, sondern von sämtlichen Ordinaten der Funktion $f(x)$ in ihrer stetigen Folge. Die Summe (3) geht dann über in das Integral

$$F_{x_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x - x_0) \cdot f(x)\,dx,$$

wo die Funktion $A(x)$ eine stetige Funktion bezeichnet, der die folgenden Eigenschaften zukommen:

a) Die Funktion $A(x)$ muß überall positiv, gerade und mit wachsender Abszisse abnehmend sein. In Gleichungen:

$$A(x) = A(-x) > 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \infty;\ A(x) > A(y) \text{ für } y > x.$$

b) Das Integral zwischen den unendlichen Grenzen $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\,dx$ muß konvergent sein und den Wert 1 ergeben.

Um den Grad der Konvergenz dieses Integrals durch einen

---

[1]) Sämtliche sogen. mechanischen Ausgleichsmethoden weisen diese Willkür auf; s. etwa Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 403.

Parameter k zu regulieren, setzen wir für kx eine neue Variable und erhalten

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{x}{k}\right)dx = 1\,.$$

Setzen wir also in dem Integral für F_{x_0} an die Stelle der Funktion $A(x-x_0)$ die Funktion $\frac{1}{k}A\left(\frac{x-x_0}{k}\right)$ ein, so ergibt sich

$$F(x_0, k) = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{x-x_0}{k}\right) f(x)\,dx\,,$$

oder für eine variable Abszisse x

$$F(x, k) = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{u-x}{k}\right) f(u)\,du\,. \tag{4}$$

Dies ist die in der Einleitung zitierte verallgemeinerte Form der Weierstraßschen Funktion F(x, k), wobei die Funktionen A(x) in das Problem eine große Mannigfaltigkeit hereinbringen.

Beiläufig sei bemerkt, daß Weierstraß die Bedingung $A(x) > A(y)$ für $y > x$ der Funktion A(x) nicht auferlegt hat.

Wir spezialisieren nun die Funktion A(x), indem wir für sie die für die Durchführung der numerischen Rechnungen geeignete Exponentialfunktion $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ einführen.

Dann geht (4) über in die Form

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du\,,$$

die wir im folgenden allein benützen und als Weierstraßsche Funktion F(x, k) bezeichnen wollen.

Über diese Funktion gelten die von H. Weierstraß in der in der Einleitung zitierten Abhandlung bewiesenen Sätze:

I. Die Funktion F(x, k) ist eine analytische Funktion, d. h. sie läßt sich in eine konvergente Taylorsche Reihe entwickeln,

vorausgesetzt, daß f(u) eine endliche, stetige,[1]) aber sonst ganz willkürliche Funktion ist.

II. Die Funktion F(x, k) konvergiert für $\mathrm{Lim}\, k = 0$ gegen f(x), also ist

$$\mathrm{Lim}_{k=0} F(x, k) = f(x).$$

Durch die Verwendung der Funktion F(x, k) zur Ausgleichung erhalten wir also nicht nur eine Ausgleichung der gegebenen diskreten Ordinaten der Reihe (1) für sich, sondern auch eine Interpolation für alle Zwischenordinaten.

§ 2.

Näherungsweise Darstellungen des Integrals F(x, k) durch eine Summe.

Wenn wir das Integral F(x, k) näherungsweise durch eine Summe darstellen wollen, so können wir uns mit einem endlichen, dem Parameter k proportionalen Intervall von x—1 bis x+1 begnügen und

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

setzen.

Um darauf näher einzugehen, setzen wir

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x-1} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{k}} f(x + k u)\, e^{-u^2} du$$

und

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{x+1}^{\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} f(x + k u)\, e^{-u^2} du.$$

---

[1]) Die Stetigkeit ist kein absolut notwendiges Erfordernis; s. Math. Ann. Bd. 47; L. Maurer, Über die Mittelwerte der Funktionen einer reellen Veränderlichen. 3.

Diese beiden Integrale haben wir dem absoluten Werte nach abzuschätzen. Nehmen wir an, die gegebene Funktion f(x) sei im ganzen nach beiden Seiten hin unendlichen Intervall endlich und dem absoluten Werte nach kleiner als eine positive Größe M, so ist

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{k}}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist unbestimmt nicht ausführbar, wir müssen uns deshalb mit einer oberen Grenze begnügen.

Es ist

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{k}}^{\infty} e^{-u^2} du < e^{-\frac{l^2}{k^2}},$$

was daraus zu ersehen ist, daß die Funktion

$$Q(l) = e^{-\frac{l^2}{k^2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{k}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

für $l = 0$ und $l = \infty$ verschwindet, und daß der Differentialquotient $Q'(l)$ dieser Funktion für $0 < l < \frac{k}{\sqrt{\pi}}$ positiv und für $l > \frac{k}{\sqrt{\pi}}$ negativ ausfällt.

Mit Hilfe obiger Gleichung wird

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < M e^{-\frac{l^2}{k^2}} = \sigma$$

und hieraus folgt

$$k^2 = \frac{l^2}{\log M - \log \sigma}, \text{ oder } k = \frac{l}{\sqrt{\log M - \log \sigma}}.$$

Damit der absolute Wert der Summe $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$ unterhalb einer beliebig zu wählenden positiven Größe σ bleibe, muß also das Verhältnis $l : k$ größer oder gleich $\sqrt{\log M - \log \sigma}$ gewählt werden.

Für das bestimmte Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{k}}^{\infty} e^{-u^2} du$ existieren außerdem sehr genaue Tabellen,[1]) die die Werte desselben viel genauer angeben als die obige Ungleichung.

Allgemein sei $\frac{l}{k} = c$ die untere Grenze für das Verhältnis $\frac{l}{k}$, derart, daß für $\frac{l}{k} \geqq c$ der absolute Wert der Summe $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < \sigma$ wird, dann können wir mit einer für die praktische Rechnung genügenden Genauigkeit setzen

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{x-ck}^{x+ck} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du. \tag{4a}$$

Zur Berechnung der Funktion $F(x, k)$ für den Wert x der unabhängig Variabeln bedarf es also nur der Kenntnis der Funktion $f(x)$ in der Nachbarschaft der Stelle x, die sich von der Stelle $x - ck$ bis $x + ck$ erstreckt. Ist $f(x)$ nicht für dieses ganze Intervall von $x - ck$ bis $x + ck$ gegeben, so kann auch der Wert $F(x, k)$ an der Stelle x nicht hinreichend genau berechnet werden.

Um obiges Integral (4a) näherungsweise durch eine Summe darzustellen, teilen wir das Intervall von $x - l$ bis $x + l$, wobei $l = ck$ zu setzen ist, in $2n$ gleiche Teile von der Länge $h = \frac{l}{n}$ und nehmen in jedem Teilintervall von $x + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) h$ bis $x + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) h$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm n)$ die Funktion $f(u)$ als

[1]) S. Czuber, Anhang Tafel I oder Annales de l'Observatoire de Paris. Mém. 18, 1885 A. Markoff.

konstant an, etwa $= f(x + \nu h)$. Das Integral $F(x, k)$ ist dann näherungsweise gleich der Summe

$$(5)\quad F'(x, k) = g_{x,0} f(x) + g_{x,1}\big(f(x+h) + f(x-h)\big) + \cdots + g_{x,n}\big(f(x+nh) + f(x-nh)\big),$$

worin die Gewichte $g_{x,i}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots n)$ der Ordinaten $f(x \pm ih)$ alle positiv, mit wachsendem Index i abnehmend und ferner so beschaffen sind, daß ihre Summe $g_{x,0} + 2\sum_{i=1}^{n} g_{x,i}$ praktisch gleich der Einheit ist.

Eine zweite Art, das Integral $F(x, k)$ durch eine endliche Summe zu approximieren, besteht darin, die auszuwählenden $2n$ Ordinaten $f(x \pm \varepsilon_i)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ nicht äquidistant, sondern so zu wählen, daß das Integral $F(x, k)$ näherungsweise ersetzt werden kann durch

$$(6)\quad F''(x, k) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\big(f(x+\varepsilon_i) + f(x-\varepsilon_i)\big)}{2n}.$$

Eine solche Auswahl der $2n$ Punkte $x \pm \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ erhalten wir, wenn wir annehmen, daß diese Punkte um den Punkt x ebenso zerstreut liegen wie die Fehler einer $2n$ maligen Bestimmung der Größe x, die streng dem Gaußschen Fehlergesetz $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{k^2}}$ genügen, d. h. wenn die relative Dichtigkeit der Punkte $x + \varepsilon_i$ an der Stelle $x + \varepsilon$ proportional ist mit der Größe $\frac{1}{2k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{k^2}}$. Die Anzahl der Ordinaten, die außerhalb des Intervalls $x - 1$ bis $x + 1$ fallen, verhält sich dann zur Gesamtzahl $2n$ aller Ordinaten wie das Integral

$$\frac{2}{k\sqrt{\pi}} \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{k^2}} d\varepsilon$$

sich zur Einheit verhält. Diese Zahl ist wie oben zu vernachlässigen.

Von dieser Verteilung der 2n Punkte $x \pm \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ macht man sich leicht eine Vorstellung und man sieht ein, daß die Gleichung (6) eine um so bessere Näherung für das Integral F(x, k) ergibt, je größer die ganze positive Zahl n gewählt wird. Für $\operatorname{Lim} n = \infty$ ergibt die Gleichung (6) exakt den Wert F(x, k).

Wir benützen die Näherung (6), um einige allgemeingültige Tatsachen zu folgern, nämlich: eine $\left.\begin{matrix}\text{konvexe}\\ \text{konkave}\end{matrix}\right\}$ Kurve f(u) geht durch Bildung des Integrals F(x, k) wiederum in eine ebensolche über mit durchweg $\left.\begin{matrix}\text{vergrößerten}\\ \text{verkleinerten}\end{matrix}\right\}$ Ordinaten (s. Fig. 1 u. 2).

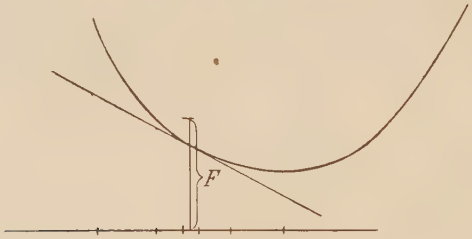


Fig. 1.

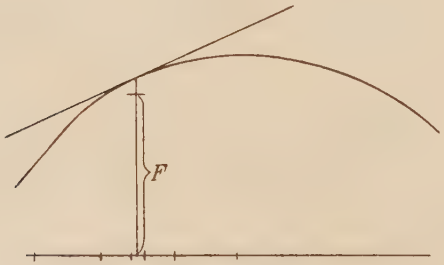


Fig. 2.

Insbesondere geht eine Gerade wieder über in eine Gerade.

Für die Mittelwerte aus den Ordinaten eines bestimmten Intervalls folgt, daß bei durchweg $\left.\begin{matrix}\text{konvexen}\\ \text{konkaven}\end{matrix}\right\}$ Kurven f die Mittelwerte der Ordinaten der ausgeglichenen Kurve F für alle Punkte des Intervalls $\gtrless\}$ ausfallen als die entsprechenden Mittelwerte aus den Ordinaten der Kurve f, und zwar ist der Unterschied um so größer, je größer der Parameter k ist.

Betrachten wir nun eine Kurve, wie wir sie in der Einleitung als eine oszillatorische definiert haben, so finden wir, daß die Ordinaten dieser Kurve in häufigem Wechsel durch die Ausgleichung bald vergrößert, bald verkleinert werden. Dadurch wird der Bedingung 1 genügt bei gleichzeitiger Erfüllung der Bedingung 2. Wenn wir also die ursprünglich gegebene Funktion f(u) in zwei Teilfunktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ zerlegen, von denen die eine eine einfache analytische, die andere eine oszillatorische Funktion ist (s. Einleitung), so erkennen wir den Vorteil, den wir haben, wenn wir den oszillatorischen Teil $\psi(u)$ allein ausgleichen, wenn wir also, anstatt das Integral

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(u) + \psi(u)\right) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

zu bilden, die Funktion

$$\varphi(u) + \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

als ausgeglichene Funktion hinstellen. Der Vorteil besteht nämlich darin, daß die Mittelwerte der gegebenen Funktion f(u) mit den entsprechenden Mittelwerten, gebildet aus der letzteren Funktion, besser übereinstimmen als mit denjenigen der ersteren, währenddem der Bedingung 1 durch beide Funktionen im selben Maße genügt wird.

§ 3.

Die Vergleichung der Mittelwerte aus den Ordinaten der gegebenen und der ausgeglichenen Funktion.

Um die Mittelwerte

$$m(x, a) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x + \xi)\, d\xi \tag{7}$$

der gegebenen Funktion f(x) im Intervall von x — a bis x + a mit den entsprechenden Mittelwerten

$$M(x, k, a) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} F(x + \xi, k)\, d\xi \tag{8}$$

der Funktion F(x, k) zu vergleichen, führen wir in das letztere Integral die gegebene Funktion f(x) ein.

Wir erhalten

$$M(x, k, a) = \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + x)\, e^{-\left(\frac{u-\xi}{k}\right)^2} du$$

Wir ändern die Integrationsordnung und lassen ξ an die Stelle von $u - \xi$ treten. Es ergibt sich

$$M(x, k, a) = \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du\, f(u + x) \int_{u-a}^{u+a} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi.$$

Das Integral nach ξ $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{u-a}^{u+a} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi$ ersetzen wir durch

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi - \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u-a} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi - \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{u+a}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u-a}{k}} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{u+a}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

und erhalten

$$M(x, k, a) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + x)\, du$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, f(u+x)\left(\int_{-\infty}^{\frac{u-a}{k}} e^{-\xi^2} d\xi + \int_{\frac{u+a}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi\right)$$

Im zweiten Integral ersetzen wir $a-u$ und im dritten $a+u$ durch eine neue Variable α und erhalten

$$M(x,k,a) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\,du - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a+\alpha)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a-\alpha)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Nun ist endlich

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a+\alpha)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x-a+\alpha)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x-a-\alpha)\,d\alpha \int_{-\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Big(f(x-a-\alpha) - f(x-a+\alpha)\Big)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} f(x-a-\alpha)\,d\alpha$$

und analog

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a-\alpha)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Big(f(x+a+\alpha)-f(x+a-\alpha)\Big)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} f(x+a+\alpha)\,d\alpha$$

und es ergibt mit Hilfe von

$$m(x,a)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,du-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{-a} f(x+u)\,du-\frac{1}{2a}\int_{a}^{\infty} f(x+u)\,du$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,du-\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} f(x-a-\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} f(x+a+\alpha)\,d\alpha$$

$$M(x,k,a)-m(x,a)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Big(f(x-a-\alpha)-f(x-a+\alpha)\Big)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Big(f(x+a+\alpha)-f(x+a-\alpha)\Big)\,d\alpha \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

Um diese Gleichung weiter zu behandeln, müßte man über die gegebene Funktion f(x) bestimmte Annahmen machen, die den oszillatorischen Charakter derselben zum Ausdruck bringen. Ein solches Beginnen erscheint an der Hand der Formel (9) ziemlich aussichtslos, weshab wir bei ihr stehen bleiben müssen.

Diese Formel zeigt deutlich die Abhängigkeit der Differenz $M-m$ vom Parameter k. Für $k=0$ wird auch $M-m=0$ für alle Werte der unabhängigen Variabeln x (s. § 1 Satz II). Für

kleine Werte von $\frac{\alpha}{k}$ hat zwar das Integral $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ einen Wert nahe an seinem Maximalwert $\frac{1}{2}$, dafür sind aber die Differenzen

$f(x-a-\alpha) - f(x-a+\alpha)$ bezw. $f(x+a+\alpha) - f(x+a-\alpha)$

sehr klein; wächst der Quotient $\frac{\alpha}{k}$, so nimmt der Wert des Integrals $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{k}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ rasch ab und ist schließlich für $\frac{a}{k} > c$ ganz zu vernachlässigen. Ziehen wir noch den oszillatorischen Charakter der Funktion f(x) in Betracht, aus welchem auf den oszillatorischen Charakter der Differenzen

$f(x-a-\alpha) - f(x-a+\alpha)$ bezw. $f(x+a+\alpha) - f(x+a-\alpha)$

zu schließen ist, so ist einzusehen, daß selbst für große Werte des Parameters k die Differenz M — m in engen Grenzen verbleibt.

§ 4.

Die speziellen Fälle, für die das Integral F(x, k) ausführbar ist.

Die vorgelegte Funktion f(u) ist uns nur für äquidistante Ordinaten gegeben. Um das Integral F(x, k) bilden zu können, bedürfen wir daher einer Interpolationsfunktion für f(u).

Wir behandeln die beiden Fälle, wo f(u) eine ganze rationale Funktion ist und wo f(u) durch eine trigonometrische Reihe dargestellt wird.

1. f(u) sei eine ganze rationale Funktion, nämlich

$$(10)\quad f(u) = f(x) + \frac{u-x}{1!} f'(x) + \frac{(u-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(u-x)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x).$$

Wir bilden die Funktion F(x, k), indem wir jedes Glied

der Reihe (10) mit dem Faktor $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$ multiplizieren und nach u zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrieren.

Für $\frac{u-x}{k} = t$ gesetzt, lauten diese Integrale

$$\frac{k^\nu}{\nu!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^\nu e^{-t^2} dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots m).$$

Nun gelangen die bekannten bestimmten Integrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^\nu e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0 & \nu \text{ ungerade} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (\nu-1)}{2^{\frac{\nu}{2}}} & \nu \text{ gerade} \end{cases}$$

zur Anwendung. Demnach wird

$$F(x, k) = f(x) + \frac{k^2}{2!} \cdot \frac{1}{2} f''(x) + \frac{k^4}{4!} \frac{1 \cdot 3}{2^2} f^{(4)}(x) + \cdots,$$

wofür man auch schreiben kann

$$(11) \quad F(x, k) = f(x) + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{1!} f''(x) + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^4}{2!} f^{(4)}(x) + \cdots + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^\mu}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!} f^{(\mu)}(x),$$

wo μ stets gerade, und zwar $= m$ ist, wenn m gerade, andernfalls $= m - 1$.

Den günstigen Umstand, daß wir das Integral $F(x, k)$ für die ganze rationale Funktion bilden können, die doch mit unendlich wachsender Abszisse dem Unendlichen zustrebt, verdanken wir der rasanten Konvergenz des Integrals $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, die so stark ist, daß das Integral $F(x, k)$ selbst dann noch einen Sinn behält, wenn wir für $f(u)$ die Exponentialfunktion e^u einführen.

2. $f(u)$ sei eine trigonometrische Funktion.

Es genügt, die einfache Sinusfunktion

(12) $$f(u) = \sin m u$$

zu betrachten.

Man erhält

$$F(x,k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin m u \cdot e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin m(x + ku) e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin mku \cos mx + \cos mku \sin mx) e^{-u^2} du.$$

Da nun

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin mku \cdot e^{-u^2} du = 0; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos mku \cdot e^{-u^2} du = e^{-\left(\frac{mk}{2}\right)^2}$$

ist, so folgt

(13) $$F(x,k) = e^{-\left(\frac{mk}{2}\right)^2} \sin mx.$$

Die ausgeglichene Funktion einer einfachen Sinusfunktion ist also wieder eine einfache Sinusfunktion mit verkürzter Amplitude, und zwar nimmt die Verkürzung mit wachsendem mk rasch zu.

Die Anwendung dieser Formeln erfolgt im dritten und vierten Kapitel.

Zweites Kapitel.

Die Zerlegung der aus einer Massenbeobachtung gewonnenen Funktion in eine analytische und in eine oszillatorische Funktion.

Es handelt sich in diesem Kapitel darum, die vorgelegte Funktion f(u) für ein bestimmtes Intervall näherungsweise durch eine analytische Funktion $\varphi(u)$ zu ersetzen derart, daß die Restfunktion $f-\varphi$ den in der Einleitung definierten oszillatorischen Charakter zeigt.

Für das Verfahren ist maßgebend der Umstand, daß die vorgelegte Funktion f(u) nur für äquidistante Ordinaten gegeben ist. Wir haben also die Aufgabe, willkürlich gegebene Wertereihen durch andere gesetzmäßige Wertereihen zu ersetzen. Als solche benützen wir im allgemeinen arithmetische Reihen, in besonderen Fällen auch geometrische Reihen und solche Reihen, deren Glieder, reziprok genommen, arithmetische Reihen bilden.

Diese Reihen können wir alsdann durch analytische Funktionen ersetzen.

Wir wollen dies etwas weiter ausführen:

Benutzen wir die von der sonst üblichen etwas verschiedene Bezeichnungsweise für die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta^1 f_0}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}; \quad \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2};$$

$$\frac{\Delta^3 f_0}{2h^3} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta^2 f_1}{h^2} - \frac{\Delta^2 f_{-1}}{h^2}\right) = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3};$$

$$\frac{\Delta^4 f_0}{h^4} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 f_{-1}}{h^2} - 2\frac{\Delta^2 f_0}{h^2} + \frac{\Delta^2 f_1}{h^2}\right) = \frac{f_2 + f_{-2} - 4(f_1 + f_{-1}) + 6f_0}{h^4};$$

allgemein

$$\frac{\Delta^{2n} f_0}{h^{2n}} = \frac{\Delta^{2n-2} f_{-1} - 2\Delta^{2n-2} f_0 + \Delta^{2n-2} f_1}{h^{2n}} \text{ und}$$

$$\frac{\Delta^{2n+1} f_0}{2h^{2n+1}} = \frac{\Delta^{2n} f_1 - \Delta^{2n} f_{-1}}{2h^{2n+1}};$$

wo wir statt f_{x_0+nh} kurz f_n gesetzt haben, so wird

$$f'(x_0) = \frac{\Delta^1 f_0}{2h} - \frac{1}{6}h^2\frac{\Delta^3 f_0}{2h^3} + \frac{h^4}{30}\cdot\frac{\Delta^5 f_0}{2h^5} - \frac{h^6}{140}\frac{\Delta^7 f_0}{2h^7} + \cdots$$

$$f''(x_0) = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\Delta^4 f_0}{h^4} + \frac{h^4}{90}\frac{\Delta^6 f_0}{h^6} - \frac{h^6}{560}\frac{\Delta^8 f_0}{h^8} + \cdots$$

$$f'''(x_0) = \frac{\Delta^3 f_0}{2h^3} - \frac{1}{4}h^2\frac{\Delta^5 f_0}{2h^5} + \frac{7}{120}h^4\frac{\Delta^7 f_0}{2h^7} - \cdots$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{\Delta^4 f_0}{h^4} - \frac{h^2}{6}\frac{\Delta^6 f_0}{h^6} + \frac{7}{240}h^4\frac{\Delta^8 f_0}{h^8} - \cdots$$

$$f^{(5)}(x_0) = \frac{\Delta^5 f_0}{2h^5} - \frac{h^2}{3}\frac{\Delta^7 f_0}{2h^7} + \cdots$$

$$f^{(6)}(x_0) = \frac{\Delta^6 f_0}{h^6} - \frac{h^2}{4}\frac{\Delta^8 f_0}{h^8} + \cdots$$

$$f^{(7)}(x_0) = \frac{\Delta^7 f_0}{2h^7} - \cdots$$

$$f^{(8)}(x_0) = \frac{\Delta^8 f_0}{h^8} - \cdots$$

Mit Hilfe dieser Formeln[1]) kann die Aufgabe gelöst werden, eine arithmetische Reihe bestimmter Ordnung durch eine ganze rationale Funktion zu ersetzen.

Wie man sieht, kann man diese Gleichungen auch auflösen nach den Differenzenquotienten, und zwar drücken sich die Differenzenquotienten gerader Ordnung durch die Derivierten gerader Ordnung, die ungerader Ordnung durch die Derivierten ungerader Ordnung aus.

Mit Hilfe dieser inversen Formeln kann die umgekehrte Aufgabe gelöst werden, eine vorgelegte ganze rationale Funktion durch eine arithmetische Reihe zu ersetzen.

Am Schluß des § 11 werden wir ein Verfahren kennen lernen, eine willkürlich gegebene Funktion durch eine ganze rationale Näherungsweise darzustellen, das zugleich gestattet, die Derivierten in einem Punkt, dem mittelsten Punkt des

---

[1]) Über die Gewinnung derselben s. Enc. d. math. Wiss. I. D. 3 Interpolation.

Intervalls, bequem anzugeben. Diese ganze rationale Funktion können wir somit nach obigen Formeln durch eine arithmetische Reihe ersetzen, womit unseren Zwecken gedient ist.

§ 5.
Die arithmetische Reihe als Näherungsreihe.

Die gegebenen äquidistanten Ordinaten seien

(1) $\cdots\cdots u_{a-2}, u_{a-1}, u_a, u_{a+1}, u_{a+2}, \cdots\cdots u_{b-1}, u_b, u_{b+1} \cdots$

Als erste Annäherung für die $n+1$-Werte der Reihe u_a, $u_{a+1}, \cdots u_b$ benutzen wir eine arithmetische Reihe I. Ordnung, d. h. eine Wertereihe mit konstanten ersten Differenzen. Wir wollen einmal den Mittelwert $\frac{u_b - u_a}{n}$ aus allen tatsächlich auftretenden ersten Differenzen in Betracht ziehen. Damit aber die Schwankungen der Werte u an den Stellen a und b nicht nachteilig wirken, ersetzen wir die Werte u_a und u_b durch Mittelwerte $\bar{u}_a$ und $\bar{u}_b$, die beispielsweise aus 5 Nachbarordinaten gebildet sein mögen. Es sei

$$\bar{u}_a = \frac{u_{a-2} + u_{a-1} + u_a + u_{a+1} + u_{a+2}}{5},$$

$$\bar{u}_b = \frac{u_{b-2} + u_{b-1} + u_b + u_{b+1} + u_{b+2}}{5}.$$

Wir setzen nun $\Delta^1 = \frac{\bar{u}_b - \bar{u}_a}{n}$ und bilden eine arithmetische Reihe I. Ordnung mit dem Anfangsgliede $\bar{u}_a$ und der Differenz Δ^1, ziehen diese Reihe Glied für Glied von der gegebenen Reihe (1) ab und erhalten die Restreihe

(1′) $\cdots\cdots u'_{a-2}, u'_{a-1}, u'_a, u'_{a+1}, \cdots\cdots u'_{b-1}, u'_b, u'_{b+1} \cdots\cdots,$

wo die Werte u'_a und u'_b sehr klein sein werden.

Es sind nun 2 Hauptfälle zu unterscheiden:

I. Die Reihe (1′) kann als oszillatorisch gelten.

II. Die Reihe (1′) kann nicht als eine solche angesehen werden.

Im Falle I können wir bei der Näherungsreihe I. Ordnung stehenbleiben.

Im Falle II müssen wir Näherungsreihen höherer Ordnung heranziehen.

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

1. Die Reihe (1′) weist (von etwaigen Zeichenwechseln dicht an den Intervallenden abgesehen)[1]) keinen weiteren Zeichenwechsel auf.

2. Die Reihe (1′) weist einen oder mehrere Zeichenwechsel auf.

Im Falle 1 wählen wir Näherungsreihen II. Ordnung.

Wir bilden von der vorgelegten Reihe (1) die erste Differenzenreihe

(2) $\cdots\cdots\ v_{a-2},\ v_{a-1},\ v_a,\ v_{a+1},\ \cdots\cdots\ v_{b-1},\ v_b,\ v_{b+1},\ \cdots\cdots$

Anstatt der tatsächlich auftretenden zweiten Differenzen ziehen wir zunächst den Mittelwert $\frac{v_{b-1} - v_a}{n-1}$ aus allen diesen in Betracht. Damit aber die Schwankungen der Werte v an den Stellen a und b — 1 nicht nachteilig wirken, ersetzen wir die Werte v_a und v_{b-1} durch Mittelwerte $\bar{v}_a$ und $\bar{v}_{b-1}$, die wie oben aus 5 Nachbarwerten gebildet sein mögen. Es ist

$$\frac{v_{a-2} + v_{a-1} + v_a + v_{a+1} + v_{a+2}}{5} = \frac{u_{a+3} - u_{a-2}}{5};$$

$$\frac{v_{b-3} + v_{b-2} + v_{b-1} + v_b + v_{b+1}}{5} = \frac{u_{b+2} - u_{b-3}}{5}.$$

Wir setzen nun

$$\bar{v}_a = \frac{\bar{u}_{a+3} - \bar{u}_{a-2}}{5};\quad \bar{v}_{b-1} = \frac{\bar{u}_{b+2} - \bar{u}_{b-3}}{5};\quad \Delta^2 = \frac{\bar{v}_{b-1} - \bar{v}_a}{n-1}$$

und bilden eine arithmetische Reihe II. Ordnung mit den Anfangsgliedern $\bar{u}_a$, $\bar{u}_a + \bar{v}_a$ und der konstanten zweiten Differenz Δ^2. Diese Reihe ziehen wir Glied für Glied von der gegebenen Reihe (1) ab und erhalten die Restreihe

(1″) $\cdots\cdots\ u''_{a-2},\ u''_{a-1},\ u''_a,\ \cdots\cdots\ u''_{b-1},\ u''_b,\ u''_{b+1},\ \cdots\cdots$

---

[1]) Dieser Zusatz wird im folgenden nicht mehr besonders hervorgehoben.

Es sind nun wieder die obigen beiden Hauptfälle I und II zu unterscheiden. Im Falle 2 müssen wir die Reihe (1) durch Näherungsreihen von höherer als der II. Ordnung ersetzen. Tritt etwa in der Reihe (1′) nur ein Zeichenwechsel auf, so muß die Näherungsreihe mindestens von der III. Ordnung sein. Für jeden weiteren Zeichenwechsel muß die Ordnung der Näherungsreihe um eine Einheit steigen.

Der Fall eines einzigen Zeichenwechsels ist wie folgt zu behandeln. Wir bilden die zwei ersten Differenzenreihen

$$\begin{array}{ll} \cdots\ u_{a-2},\ u_{a-1},\ u_a,\ u_{a+1},\ \cdots & u_{b-2},\ u_{b-1},\ u_b,\ \cdots \\ v_{a-2},\ v_{a-1},\ v_a,\ \cdots & v_{b-2},\ v_{b-1},\ \cdots \\ w_{a-2},\ w_{a-1},\ \cdots & w_{b-2},\ \cdots \end{array}$$

Anstatt der tatsächlich auftretenden dritten Differenzen ziehen wir wieder den Mittelwert $\frac{w_{b-2} - w_a}{n-2}$ aus allen diesen in Betracht. Damit aber die Schwankungen der Werte w an den Stellen a und $b-2$ nicht nachteilig wirken, ersetzen wir die Werte w_a und w_{b-2} durch Mittelwerte $\overline{w}_a$ und $\overline{w}_{b-2}$, die wie oben aus 5 Nachbarwerten gebildet sein mögen. Es ist

$$\frac{w_{a-2} + w_{a-1} + w_a + w_{a+1} + w_{a+2}}{5} = \frac{v_{a+3} - v_{a-2}}{5};$$

$$\frac{w_{b-4} + w_{b-3} + w_{b-2} + w_{b-1} + w_b}{5} = \frac{v_{b+1} - v_{b-4}}{5}.$$

Wir setzen nun

$$\overline{w}_a = \frac{\overline{v}_{a+3} - \overline{v}_{a-2}}{5} = \frac{\overline{u}_{a-6} - 2\overline{u}_{a+1} + \overline{u}_{a-4}}{25};$$

$$\overline{w}_{b-2} = \frac{\overline{v}_{b+1} - \overline{v}_{b-4}}{5} = \frac{\overline{u}_{b+4} - 2\overline{u}_{b-1} + \overline{u}_{b-6}}{25}$$

$$\Delta^3 = \frac{\overline{w}_{b-2} - \overline{w}_a}{n-2}$$

und bilden eine arithmetische Reihe III. Ordnung mit den Anfangsgliedern $\overline{u}_a$, $\overline{u}_a + \overline{v}_a$, $\overline{u}_a + \overline{v}_a + \overline{w}_a$ und der konstanten dritten Differenz Δ^3.

Diese Reihe ziehen wir wieder gliedweise von der gegebenen Reihe (1) ab usw. Das Prinzip des Verfahrens, vor

allem die Bildung der Differenzen $\overline{v}$, $\overline{\overline{w}}$ ... ist nun klar. Unbestimmt bleibt der Natur der Sache nach nur noch die Zahl der Ordinaten (im Beisp. = 5), aus denen die Mittelwerte gebildet werden. Wir bilden aus dem Anfangsgliede $\overline{u}_a$ und den Differenzen $\overline{v}_a$, $\overline{\overline{w}}_a$ ... arithmetische Näherungsreihen, für die letzte konstant werdende Differenz wählen wir den Mittelwert aus den tatsächlich vorkommenden Werten dieser Größen, wobei wir statt der unüberstrichenen Größen u, v, w ..., die überstrichenen $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{\overline{w}}$ ... einführen.

Aus dem Verfahren resultiert eine Bevorzugung des einen Endpunktes a des darzustellenden Intervalls, was im allgemeinen eine bessere Anschmiegung der Näherungsreihe an die vorgelegte Reihe (1) in der Umgebung dieses Punktes nach sich zieht als in der des andern Endpunktes b. Es liegt nichts im Wege, den Endpunkt b, ja überhaupt jeden beliebigen Punkt des Intervalls in dieser Weise zu bevorzugen. Am besten für die Praxis mag sich ein Punkt nahe der Mitte des Intervalls eignen.

Wenn wir in dem folgenden, möglichst einfach gewählten Beispiele trotzdem den Endpunkt a in dieser Weise bevorzugen, so ist es nur, um obige Formeln direkt anwenden zu können.

Beispiel. Die Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Altersklassen von 30 bis 40 Jahren mit 10^5 multipliziert.[1])

[1]) Entnommen der Deutschen Sterbetafel, gegr. auf die Sterblichkeit d. Reichsbevölkerung in den 10 Jahren 1871/72 bis 1880/81; s. Monatshefte z. Stat. d. Deutsch. Reiches 1887 Nov.-Heft.

Altersklassen nach Jahren	Sterbenswahrscheinlichktn. $\times 10^5$ Werte u	Werte $\bar{u}$	Näherungsreihe I. Ordnung	Restreihe	Näherungsreihe II. Ordng.	1. Diff.-reihe	Restreihe
28	894	890,4	847,52	+ 46,48	890,64	19,52	+ 3,36
29	906		890,26	+ 15,74	910,16	22,84	— 4,16
30	935	933	933	+ 2	933	26,16	+ 2,00
31	948		975,74	— 27,74	959,16	29,48	— 11,16
32	982		1018,48	— 36,48	988,64	32,80	— 6,64
33	1016	1021,2	1061,22	— 45,22	1021,44	36,12	— 5,44
34	1058		1103,96	— 45,96	1057,56	39,44	+ 0,44
35	1102		1146,70	— 44,70	1097,00	42,76	+ 5,00
36	1152		1189,44	— 37,44	1139,76	46,08	+ 12,24
37	1182	1198,2	1232,18	— 50,18	1185,84	49,40	— 3,84
38	1253		1274,92	— 21,92	1235,24	52,72	+ 17,76
39	1302		1317,66	— 15,66	1287,96	56,04	+ 14,04
40	1364	1360,4	1360,40	+ 3,60	1344,00	59,36	+ 20,00
41	1404		1403,14	+ 0,86	1403,36	62,68	+ 0,64
42	1479	1478,4	1445,88	+ 33,12	1466,04		+ 12,96

Die Näherungsreihe I. Ordnung hat zum Anfangsglied

$$\bar{u}_{30} = 933 = \frac{u_{28} + u_{29} + u_{30} + u_{31} + u_{32}}{5}$$

und die konstante erste Differenz

$$\Delta^1 = \frac{\bar{u}_{40} - \bar{u}_{30}}{10} = \frac{1360{,}4 - 933}{10} = 42{,}74\,.$$

Diese Reihe von der gegebenen Reihe u abgezogen, liefert eine Restreihe, die, die Intervallenden ausgenommen, keinen Zeichenwechsel aufweist. Wir gehen deshalb über zu der Näherungsreihe II. Ordnung.

Die Näherungsreihe II. Ordnung hat die Anfangsglieder $\bar{u}_{30} = 933$ und

$$\bar{u}_{30} + \bar{v}_{30} = \bar{u}_{30} + \frac{\bar{u}_{33} - \bar{u}_{28}}{5} = 933 + \frac{1021{,}2 - 890{,}4}{5} = 959{,}16$$

und die konstante zweite Differenz

$$\Delta^2 = \frac{\bar{v}_{39} - \bar{v}_{30}}{9} = \frac{56{,}04 - 26{,}16}{9} = \frac{29{,}88}{9} = 3{,}32\,.$$

Wie man sieht, ist die Annäherung dieser arithmetischen

Reihe II. Ordnung an die vorgelegte Reihe schon bedeutend besser als diejenige der arithmetischen Reihe I. Ordnung.

§ 6.

Die geometrische Reihe als Näherungsreihe.

Es tritt zuweilen — in merklicher Weise nur für größere Intervalle — der Fall ein, daß die Reihe der Logarithmen aus den Gliedern der vorgelegten Reihe (1)

(3) $\ldots \mathrm{l}u_{a-2}, \mathrm{l}u_{a-1}, \mathrm{l}u_a, \ldots \mathrm{l}u_{b-1}, \mathrm{l}u_b, \mathrm{l}u_{b+1}, \ldots$

leichter durch eine arithmetische Reihe approximiert werden kann als dies für die vorgelegte Reihe möglich ist.

Dies ist der Fall, wenn die Reihe (3) eine arithmetische Näherungsreihe M von der Beschaffenheit besitzt, daß die Restreihe, die durch Subtraktion der Glieder der Reihe M von den Gliedern der Reihe (3) entsteht, das gewünschte oszillatorische Verhalten zeigt und die Ordnung dieser Reihe M niedriger ist als diejenige der Näherungsreihe N der Reihe (1), die gleichfalls so beschaffen sei, daß die Restreihe, die durch Subtraktion der Reihe N von der Reihe (1) entsteht, das gewünschte oszillatorische Verhalten zeigt.

§ 7.

Die Näherungsreihe, deren Glieder reziprok genommen, eine arithmetische Reihe bilden.

Wir wollen Näherungsreihen dieser Art nur verwenden, wenn die Werte der Reihe (1) bei der Annäherung an ein Intervallende ein starkes Ansteigen bezw. Abfallen aufweisen.

Als ein solches Beispiel bietet sich die Sterblichkeitskurve dar für die ersten Lebensjahre (s. Monatshefte z. Stat. d. Deutsch. Reiches 1887 Nov.-Heft S. 35; Graphische Darst. d. Stw. oder auch Czuber, Wahrsch. Rechng. III, 191 S. 376).

Wir bilden, im allgemeinen nach Abzug einer geeigneten Konstanten von den Werten der gegebenen Reihe (1), die Reihe der reziproken Werte und suchen diese durch eine einfache arithmetische Reihe zu approximieren.

Beispiel: Die Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Altersklassen von 0 bis 10 Jahren (entnommen aus der deutschen Sterbetafel).

Altersklassen nach Jahren	Sterbenswahrscheinlichkeiten Werte u[1])	Werte $\frac{1}{u}$	Näherungsreihe II. Ordnung für $\frac{1}{u}$	1. Differenz
0	0,25273	3,96	3,96	11,44
1	0,06492	15,40	15,40	13,44
2	0,03319	30,13	28,84	15,44
3	0,02309	43,31	44,28	17,44
4	0,01705	58,65	61,72	19,44
5	0,01300	76,92	81,16	21,44
6	0,01020	98,04	102,60	23,44
7	0,00828	120,77	126,04	25,44
8	0,00668	149,70	151,48	27,44
9	0,00538	185,87	178,92	29,44
10	0,00469	213,22	208,36	

Die Näherungsreihe II. Ordnung wurde gebildet mit den Anfangsgliedern 3,96 und 15,40 und der konstanten zweiten Differenz $\Delta^2 = 2$. Wie wir sehen, ist die Annäherung an die Reihe $\frac{1}{u}$ eine sehr gute.

Drittes Kapitel.

Anwendung auf die Aufgabe der Ausgleichung statistischer Tabellen.

Um den in der Einleitung beschriebenen, allgemein gesprochen, unregelmäßigen Verlauf einer statistischen Zahlenreihe, der, wie wir gesehen haben, zu einem guten Teil auf die unvollkommene Beobachtungsmöglichkeit zurückzuführen ist, durch einen der Natur der Sache entsprechenden regelmäßigen Verlauf zu ersetzen, bedient man sich der sogen. Ausgleichsmethoden.

[1]) Hier ist das Abziehen einer Konstanten von den Gliedern der Reihe u nicht nötig.

Die eine Klasse dieser Methoden versucht, die ausgeglichene Wertereihe dem für die betreffende Massenerscheinung gefundenen analytischen Gesetz anzupassen durch eine Bestimmung der Konstanten dieses Gesetzes nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Da aber solche analytischen Gesetze nach der neueren Anschauung[1]) absolute Gültigkeit nicht besitzen, sondern nur als erste grobe Annäherungen zu gelten haben, so ist diese Klasse von Ausgleichsmethoden nur von beschränktem Werte.

Neben dieser Klasse von Ausgleichsmethoden gibt es noch mechanische und graphische Ausgleichsmethoden (s. etwa Czuber (S. 393—394, 403—411), die für den Verlauf der ausgeglichenen Wertereihe kein analytisches Gesetz zugrunde legen, sondern jeden einzelnen Wert für sich abändern unter Berücksichtigung der Nachbarwerte. Von einem einheitlichen Verfahren kann hier nicht gesprochen werden; diese Ausgleichsformeln erfüllen alle mehr oder weniger die in der Einleitung zum ersten Kapitel aufgestellte Bedingung 1, ohne aber auf die Bedingung 2 besondere Rücksicht zu nehmen. Aus dieser ungenauen Formulierung des Problems erklärt sich die große Menge der hierher gehörigen Ausgleichsmethoden.[2]) Durch die Aufstellung der Bedingung 2 haben wir das Problem erstens viel enger präzisiert und zweitens gefunden, daß wir genauere Resultate erhalten, wenn wir nur den oszillatorischen Teil der vorgelegten Wertereihe ausgleichen, als wenn wir, wie dies bei fast sämtlichen Ausgleichsmethoden dieser Art geschieht,[3]) die Ausgleichung direkt auf die gegebene Wertereihe anwenden.

Ein Verfahren zur Zerlegung der vorgelegten Wertereihe in eine gesetzmäßige Wertereihe und in eine oszillatorische Restreihe haben wir im letzten Kapitel besprochen; wir dürfen also künftighin die auszugleichende Wertereihe als von oszillatorischem Charakter voraussetzen.

---

[1]) s. Czuber, Wahrsch. Rechng. Abschn. 2, 197 (erster Teil).

[2]) s. etwa Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen, Wien 1893.

[3]) Einige Ausgleicher haben diese Tatsache erkannt und Gegenmaßregeln getroffen; s. Ausgleichsmethode von Behm (Blaschke S. 104).

§ 8.

Die näherungsweise Berechnung des Integrals F (x, k).

Setzt man in der Gleichung

$$(1) \qquad F(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + k u)\, e^{-u^2} d u$$

$$(2) \qquad f(x + k u) = \varphi(u),$$

so lautet das auszuführende Integral

$$(3) \qquad F(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{-u^2} d u$$

Zur Auswertung dieses Integrals ersetzen wir $\varphi(u)$ durch eine ganze rationale Funktion vom Grade m—1. Eine solche wird bestimmt durch die Ordinaten in m willkürlich gewählten Abszissen. Es wird aber für die Genauigkeit des Integrals nicht unwesentlich sein, in welcher Weise wir diese m-Punkte der Abszissenachse auswählen. Gauß[1]) hat dies für die Integration zwischen endlichen Grenzen nachgewiesen und gefunden, daß es die Legendreschen Polynome sind, deren Wurzelwerte am vorteilhaftesten für die Abszissen dieser m-Punkte gewählt werden. Er hat gezeigt, daß bei der Wahl dieser Abszissen das Integral $\int_{-1}^{+1} f(u)\, d u$ so lange exakt bleibt, als $f(u)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $\nu < 2m$ ist.

Den entsprechenden Nachweis für Integrale zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gab Gourier,[2]) der fand, daß bei der Wahl der m reellen Wurzeln des m. Hermiteschen Polynoms für die m auszuwählenden Abszissen das Integral (3) exakt bleibt, solange $\varphi(u)$ eine ganze rationale Funktion von einem Grade $< 2m$ ist.

Die Hermiteschen Polynome sind diejenigen, welche aus

---

[1]) Gauß, Werke t. III p. 165.

[2]) E. Gourier, Par. C. R. 97 p. 79.

der Exponentiellen e^{-x^2} durch fortgesetzte Differentiation abgeleitet werden können.

Das m. Polynom definieren wir durch die Gleichung

$$(4) \qquad \underset{m}{P}(x) = \frac{1}{m!\,(\sqrt{2})^m} e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

Die Haupteigenschaften dieser Polynome wurden schon von Hermite[1]) selbst angegeben. Neuerdings sind diese Polynome, zusammen mit andern, Differentialgleichungen genügenden Polynomen, durch die von D. Hilbert[2]) geschaffene weitreichende Theorie der linearen Integralgleichungen in ein neues Licht gerückt werden.

Diese Polynome besitzen die bekannten Orthogonalitätseigenschaften

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(z) \cdot P_m(z) e^{-z^2} dz = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq m \\ \frac{1}{n!} \text{ für } n = m\,. \end{cases}$$

Die Wurzeln sämtlicher Polynome sind reell.

Jede willkürliche Funktion kann in eine nach Hermiteschen Polynomen fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Dies sind die Haupteigenschaften dieser Polynome.

Weitere für uns wichtige Relationen werden wir in § 9, gestützt auf die obige Definition, zur Sprache bringen.

Nunmehr wenden wir uns zum Integral (3) zurück und setzen nach Gourier

$$(6) \qquad \varphi(u) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{P_m(u)\,\varphi(a_\mu)}{(u - a_\mu)\,P'_m(a_\mu)}\,,$$

wo die Werte $a_\mu\,(\mu = 1, 2, \ldots m)$ die m reellen Wurzeln des m. Hermiteschen Polynoms $P_m(x)$ bedeuten. Nach Gleichung (3) wird

$$F(x, k) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\varphi(a_\mu)}{P'_m(a_\mu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(u) \cdot e^{-u^2} du}{u - a_\mu}\,.$$

---

[1]) C. R. t. LVIII p. 93, 266 (1864).

[2]) Gött. Nachr. 1904 und die folgenden Jahrgänge; s. auch die Arbeit von Myller-Lebedeff, Math. Ann. Bd. 64.

Setzt man hierin zur Abkürzung

$$(7) \qquad \frac{m!}{(\sqrt{2})^m \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(u) - P_m(v)}{u - v} e^{-u^2} du = Q_m(v),$$

wo also $Q_m(v)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $m-1$ bedeutet, so wird

$$F(x, k) = \frac{(\sqrt{2})^m}{m!} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\varphi(a_\mu)}{P'_m(a_\mu)} Q_m(a_\mu) .$$

Nach einer im nächsten Paragraph zu beweisenden Relation

$$(8) \qquad \frac{1}{P'_m(a_\mu)} = (\sqrt{2})^{m-2} Q_m(a_\mu)$$

wird

$$(9) \qquad F(x, k) = \frac{2^{m-1}}{m!} \sum_{\mu=1}^{m} Q^2_m(a_\mu) \varphi(a_\mu),$$

worin gemäß Gleichung (2)

$$\varphi(a_\mu) = f(x + k a_\mu)$$

zu setzen ist.

Die Gleichung (9) liefert nun den Wert der ausgeglichenen Ordinate $F(x, k)$ für jede Abszisse x als lineare Funktion der m-Ordinaten $f(x + k a_\mu)$, und zwar sind die Koeffizienten dieser Ordinaten sämtlich positiv.

Wir erkennen auch den Einfluß des Parameters k auf die Lage der m auszuwählenden Abszissen $x + k a_\mu$ ($\mu = 1,2 \ldots m$): je größer k, desto zerstreuter liegen diese m-Punkte.

§ 9.
Rechnungsdaten und weitere Relationen für die Hermiteschen Polynome.

Wir gehen aus von der Definitionsgleichung

$$e^{-2hx-h^2} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) (\sqrt{2})^m h^m ,$$

die mit der Definitionsgleichung (4) identisch ist.

Aus dieser und der nach x differentiierten Gleichung folgt durch Vergleichen der Koeffizienten von h^{m-1} die Relation

(10) $$P'_m = -\sqrt{2}\, P_{m-1}.$$

Desgleichen folgt aus derselben und der nach h differentiierten Gleichung durch Vergleichen der Koeffizienten von h^m beiderseits

(11) $$(m+1)\, P_{m+1}(x) + \sqrt{2}\, x\, P_m(x) + P_{m-1}(x) = 0.$$

Aus der Gleichung (10) und der nach x differentiierten Relation (11) folgt durch Elimination von $P'_{m+1}(x)$ für $x = 0$ die weitere Relation

$$P_m(0) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot m}\, P'_{m-1}(0).$$

Somit wird

$$P_m(x) = -\sqrt{2} \int_0^x P_{m-1}(x)\, dx + \frac{P'_{m-1}(0)}{\sqrt{2} \cdot m}.$$

Nach dieser Rekursionsformel lassen sich die Polynome am leichtesten berechnen.

Wir erhalten, da $P(0) = 1$ ist,

$$P_1 = -\sqrt{2} \cdot x$$

$$P_2 = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right)$$

$$P_4 = \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}$$

$$P_5 = \sqrt{2}\left(-\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{8}\right).$$

Für die durch die Gleichung (7) definierten Polynome Q ergeben sich die Werte

$$Q_1 = -1$$

$$Q_2 = x$$

$$Q_3 = -x^2 + 1$$

$$Q_4 = x^3 - \frac{5}{2}x$$

$$Q_5 = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - 2\,.$$

Wir fügen hier den Beweis einer in § 11 benutzten Relation ein. Es soll nämlich bewiesen werden, daß das Integral

$$R_m(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_m\left(z + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) e^{-2z^2}\, dz\,,$$

das eine ganze rationale Funktion m. Grades von v darstellt, mit $P_m(v)$ durch die folgende einfache Relation

$$R_m(v) = \frac{P_m(v)}{(\sqrt{2})^m} \tag{12}$$

verknüpft ist.

Zum Beweise setzen wir

$$R_m(v) = \frac{P_m(v)}{(\sqrt{2})^m} + \varepsilon_m(v)$$

und verstehen unter $\varepsilon_m(v)$ eine ganze rationale Funktion von höchstens dem m. Grade.

Unser Beweis ist dann auf das identische Verschwinden dieser Funktion $\varepsilon_m(v)$ gerichtet.

In der Tat erhalten wir durch eine einmalige Differentiation nach v

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'_m\left(z + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) e^{-2z^2}\, dz = \frac{P'_m(v)}{(\sqrt{2})^m} + \varepsilon'_m(v),$$

oder nach Formel (10), unter $\varepsilon_{m-1}(v)$ eine ganze rationale Funktion von höchstens dem Grade $m-1$ verstehend,

$$-\frac{P_{m-1}(v)}{(\sqrt{2})^{m-1}} - \varepsilon_{m-1}(v) = -\frac{P_{m-1}(v)}{(\sqrt{2})^{m-1}} + \varepsilon'_m(v)$$

oder

$$\varepsilon'_{m+1}(v) = -\varepsilon_m(v)\,.$$

Da nun sicherlich $\varepsilon_1(v) = 0$ ist, so könnte $\varepsilon_2(v)$ höchstens eine Konstante sein. Beweisen wir aber, daß keine der Funk-

tionen $\varepsilon_1(\nu), \varepsilon_2(\nu), \cdots$ für $\nu = 0$ von Null verschieden sein kann, so ist offenbar der ganze Beweis damit erbracht.

Es bleibt uns also noch der Beweis der Formel

$$R_m(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(z)\, e^{-2z^2}\, dz = \frac{P_m(0)}{(\sqrt{2})^m}$$

zu erbringen übrig.

Für alle ungeraden m ist diese Formel richtig, sie bleibt noch für die geraden $m = 2n$ zu beweisen übrig.

Da

$$P_{2n}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}n} P'_{2n-1}(0)$$

und ferner

$$P'_{2n-1}(0) = -\sqrt{2}\, P_{2n-2}(0) \quad \text{(nach (10))}$$

ist, so folgt

$$P_{2n}(0) = -\frac{1}{2n} P_{2n-2}(0)$$

$$P_{2n-2}(0) = -\frac{1}{2n-2} P_{2n-4}(0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

somit wird $$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Um zu beweisen, daß in der Tat

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n}(z)\, e^{-2z^2}\, dz = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!}$$

ist, multiplizieren wir die obige Definitionsgleichung mit $\frac{e^{-k^2x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx$ und integrieren nach x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Wir erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(kx + \frac{h}{k}\right)^2} e^{\frac{h^2}{k^2} - h^2}\, dx = \frac{1}{k} e^{\frac{h^2}{k^2} - h^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (\sqrt{2})^m h^m \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\, e^{-k^2x^2}\, dx.$$

Hieraus ergibt sich durch Vergleichen der Koeffizienten von h^{2n} auf beiden Seiten die allgemeine Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n}(x) \cdot e^{-k^2x^2} \, dx = \frac{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^n}{(\sqrt{\pi})^{2n} \, n! \, k},$$

die für $k = \sqrt{2}$ in die zu beweisende Gleichung übergeht.

Für die Wurzeln der Hermiteschen Polynome endlich erhalten wir auf 4 Dezimalen genau die nachstehenden Werte.

Wurzeln der Hermiteschen Polynome.

Polynome	Wurzeln
P_1	$a_1 = 0$
P_2	$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071;\ a_2 = -a_1$
P_3	$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6} = 1{,}2248;\ a_3 = -a_2$
P_4	$a_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}} = 0{,}5246;\ a_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}} = 1{,}6507;$ $a_3 = -a_1;\ a_4 = -a_2$
P_5	$a_1 = 0;\ a_2 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{10}}{2}} = 0{,}9586;$ $a_3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{10}}{2}} = 2{,}0202;\ a_4 = -a_2;\ a_5 = -a_3$
P_6	$a_1 = 0{,}4361 = -a_4;\ a_2 = 1{,}3358 = -a_5;$ $a_3 = 2{,}3506 = -a_6$
P_7	$a_1 = 0;\ a_2 = 0{,}8163 = -a_5;\ a_3 = 1{,}6736 = -a_6;$ $a_4 = 2{,}6520 = -a_7$
P_8	$a_1 = 0{,}3812 = -a_5;\ a_2 = 1{,}1572 = -a_6;$ $a_3 = 1{,}9817 = -a_7;\ a_4 = 2{,}9306 = -a_8$
P_9	$a_1 = 0;\ a_2 = 0{,}7237 = -a_6;\ a_3 = 1{,}4685 = -a_7;$ $a_4 = 2{,}2666 = -a_8;\ a_5 = 3{,}1910 = -a_9.$

Wir holen zum Schluß dieses Paragraphen den Beweis der Relation (8) des letzten Paragraphen nach.

Die Polynome Q (Gl. 7) genügen gleichfalls einer Rekursionsformel, die der Rekursionsformel (11) für die Polynome P entspricht, nämlich.

$$(13) \qquad 2\,Q_{m+1}(x) + 2x\,Q_m(x) + m\,Q_{m-1}(x) = 0.^{1})$$

Aus den Formeln (11) und (13) eliminieren wir die frei auftretende Variable x und erhalten

$$(m+1)\,P_{m+1}\,Q_m - \sqrt{2}\,P_m\,Q_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(m\,P_m Q_{m-1} - \sqrt{2}\,P_{m-1}Q_m),$$

oder

$$m\,P_m\,Q_{m-1} - \sqrt{2}\,P_{m-1}\,Q_m = D_m$$

gesetzt,

$$D_{m+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,D_m.$$

Nun ist $D_1 = \sqrt{2}$, somit $D_2 = 1$, $D_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \cdots$ allgemein

$$D_m = \frac{(\sqrt{2})^m}{2^{m-1}}.$$

Führt man in D_m statt $-\sqrt{2}\,P_{m-1}$ nach (10) den Wert P'_m ein, so erhält man für jede der m Wurzeln des Polynoms P_m

$$Q_m(a_\mu) \cdot P'_m(a_\mu) = \frac{(\sqrt{2})^m}{2^{m-1}}$$

---

[1]) Es ist darauf hinzuweisen, daß die Formeln (10) und (11) von den von Hermite angegebenen sich etwas unterscheiden. Dies rührt daher, daß die Hermitesche Definition für P_m anders lautet, nämlich

$$P_m(x) = e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}.$$

Würde man aus diesen Polynomen P_m die Polynome Q_m definieren durch

$$Q_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(y) - P_m(x)}{y - x}\,e^{-y^2}\,dy,$$

so würden beide Polynomen P_m und Q_m einer und derselben Rekursionsformel $\Pi_{m+1}(x) + 2x\Pi_m(x) + 2m\Pi_{m-1}(x) = 0$ genügen, wie denn überhaupt bei dieser Normierung der Polynome P und Q obiger Beweis sich etwas übersichtlicher gestalten würde.

oder

$$\frac{1}{P'_m(a_\mu)} = (\sqrt{2})^{m-2} Q_m(a_\mu)$$

w. z. b. w.

§ 10.

Die Ausgleichsformeln unter Zugrundelegung der ganzen rationalen Funktion als Interpolationsfunktion.

Die Formel (9) des § 8 repräsentiert eine ganze Klasse von Ausgleichsformeln. Diese Formeln sind dadurch entstanden, daß wir für f(u) eine ganze rationale Funktion eingeführt haben; die ganze positive Zahl m — 1 bedeutet den Grad dieser Interpolationsfunktion. Der Parameter k kann noch zu jeder ganzen positiven Zahl m nach Belieben gewählt werden.

Nun greift eine Bemerkung Platz, die wir an die Tabelle des letzten Paragraphen für die Wurzeln der Hermiteschen Polynome anfügen können.

Die Wurzeln eines jeden Polynoms bilden nämlich mit merklicher Annäherung eine arithmetische Reihe I. Ordnung; daraus folgt, daß die m-Ordinaten $f(x + k a_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \cdots m)$, die in die Formel (9) eingehen, nahezu äquidistant sind, und daß demnach der Parameter k zu jeder ganzen positiven Zahl m so gewählt werden kann, daß diese m-Ordinaten nahezu mit den gegebenen diskreten Ordinaten zur Deckung gebracht werden können. Für gerade m muß alsdann, wie aus der Tabelle ersichtlich, die auszugleichende Ordinate in die Mitte zwischen zwei gegebenen Ordinaten fallen, für ungerade m hingegen muß sie mit einer der gegebenen Ordinaten zusammenfallen. Es resultiert für jeden Wert von m ein bestimmter Wert des Parameters k, wenn wir k so wählen, daß von den zur Ausgleichung einer Ordinate heranzuziehenden Nachbarordinaten die zu beiden Seiten nächstgelegenen mit zwei gegebenen Ordinaten zusammenfallen. Mit anderen Worten: Für jedes ungerade m muß $k a_1 = h$ und für jedes gerade m muß $k a_1 = \frac{h}{2}$

sein, wo h den Abstand zweier benachbarter diskreter Ordinaten bedeutet. Auf diese Weise wird

$$
(14)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{für } m = 3 & k_3 = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,h = 0{,}8165\,h \\
\text{für } m = 4 & k_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}\,h = 0{,}9530\,h \\
\text{für } m = 5 & k_5 = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{10}}{15}}\,h = 1{,}0432\,h \\
\text{für } m = 6 & k_6 = 1{,}1465\,h \\
\text{für } m = 7 & k_7 = 1{,}2250\,h, \text{ nahezu } = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,h \\
\text{für } m = 8 & k_8 = 1{,}3116\,h \\
\text{für } m = 9 & k_9 = 1{,}3818\,h
\end{array}\right.
$$

Die zu diesen Werten von m und k gehörigen Ausgleichsformeln ergeben sich aus Gleichung (9) nach Ausführung einiger numerischer Berechnungen wie folgt:

$$F(x, k_3) = \frac{4\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{6}$$

$$F(x, k_4) = 0{,}4541\,(\varphi_1 + \varphi_3) + 0{,}0460\,(\varphi_2 + \varphi_4)$$

$$F(x, k_5) = 0{,}53333\,\varphi_1 + 0{,}22208\,(\varphi_2 + \varphi_4) + 0{,}01126\,(\varphi_3 + \varphi_5)$$

$$F(x, k_6) = 0{,}409\,(\varphi_1 + \varphi_4) + 0{,}088\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}003\,(\varphi_3 + \varphi_6)^{1})$$

$$F(x, k_7) = 0{,}457\,\varphi_1 + 0{,}240\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}031\,(\varphi_3 + \varphi_6) + 0{,}001\,(\varphi_4 + \varphi_7)$$

$$F(x, k_8) = 0{,}3730\,(\varphi_1 + \varphi_5) + 0{,}1174\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}0096\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}0001\,(\varphi_4 + \varphi_8)$$

$$F(x, k_9) = 0{,}40635\,\varphi_1 + 0{,}2441\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}0499\,(\varphi_3 + \varphi_7 + 0{,}0028\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}0000\,(\varphi_5 + \varphi_9),$$

worin zur Abkürzung für $\varphi(a_\mu) = f(x + k\,a_\mu)$ kurz φ_μ gesetzt wurde.

Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß die in dieser Tabelle auftretenden Koeffizienten alle positiv sind; es kann

---

[1]) Die Werte $Q^2{}_m(a_\mu)$ $(m = 3, 4, \cdots 9)$ konnten mit Hilfe von fünfstelligen Logarithmen nicht immer auf vier Dezimalen genau berechnet werden.

ferner nachgewiesen werden, daß die Summe der Koeffizienten (Gewichte) in jeder dieser Formeln gleich 1 ist. Diese Gewichte der Nachbarordinaten werden um so kleiner, je weiter die Ordinaten von der auszugleichenden Ordinate abgelegen sind. Für $m = 9$ ist das Gewicht der am weitesten abgelegenen Ordinaten so klein, daß es bei jeder praktischen Rechnung vernachlässigt werden kann.

Eine Fortsetzung dieser Tabelle erscheint, um zu größeren Werten des Parameters k und damit zu wirksameren Ausgleichsformeln zu gelangen, im Interesse der Praxis dringend notwendig; theoretisch ist der Weg dazu gegeben.

Da die Gewichte der Nachbarordinaten in obigen Formeln mit dem Abstand dieser Ordinaten von der auszugleichenden rasch abnehmen, so wird der Fehler, den wir begehen, wenn wir statt dieser Ordinaten $\varphi_\mu (\mu = 1, 2 \cdots m)$ die nächst benachbarten gegebenen Ordinaten einführen, für alle diese Gleichungen sehr klein werden.

Bei geradliniger Interpolation zwischen den gegebenen Ordinaten lassen sich für diese Fehler bequem obere Grenzen festsetzen, wenn wir noch annehmen, der Maximalbetrag für den absoluten Wert der Differenz irgend zweier benachbarter gegebener Ordinaten sei kleiner als δ.

Die Berechnung ergibt, daß diese Fehler sehr klein sind. Inwieweit diese Fehler überhaupt als solche anzusprechen sind, zeigt die folgende Überlegung.

Da wir die Funktion F(x, k) nur punktweise (für äquidistante Abszissen) gebildet und für jede solche Abszisse x eine besondere Interpolationsfunktion aufgestellt haben, die sich im allgemeinen von den übrigen unterscheidet, so können die diskreten Werte F(x, k) nicht mehr die Eigenschaft für sich beanspruchen, aus einer einzigen vorgelegten Funktion f(u) hervorgegangen zu sein. Diese Einzelwerte F(x, k) besitzen somit auch nicht in aller Strenge die in Kap. 1 von dieser Funktion abgeleiteten Eigenschaften. Zu den obengenannten Fehlern gesellt sich demnach eine neue, ihrer Größe nach gar nicht abzuschätzende Fehlerquelle hinzu. Statt der letzt-

genannten Formeln verwenden wir also unter Beibehaltung der Werte k_3 bis k_9 der Tabelle (14) die folgenden Formeln

$$
(15)\quad
\begin{cases}
F(x, k_3) = \frac{2}{3} f_x + \frac{1}{6}(f_{x+h} + f_{x-h}) \\
F(x, k_4) = 0{,}4541 \left(f_{x+\frac{h}{2}} + f_{x-\frac{h}{2}}\right) + 0{,}0460 \left(f_{x+3\frac{h}{2}} + f_{x-3\frac{h}{2}}\right) \\
F(x, k_5) = 0{,}53333\, f_x + 0{,}22208 (f_{x+h} + f_{x-h}) \\
\qquad\qquad + 0{,}01126 (f_{x+2h} + f_{x-2h}) \\
F(x, k_6) = 0{,}409 \left(f_{x+\frac{h}{2}} + f_{x-\frac{h}{2}}\right) + 0{,}088 \left(f_{x+3\frac{h}{2}} + f_{x-3\frac{h}{2}}\right) \\
\qquad\qquad + 0{,}003 \left(f_{x+5\frac{h}{2}} + f_{x-5\frac{h}{2}}\right) \\
F(x, k_7) = 0{,}457\, f_x + 0{,}240 (f_{x+h} + f_{x-h}) \\
\qquad + 0{,}031 (f_{x+2h} + f_{x-2h}) + 0{,}001 (f_{x+3h} + f_{x-3h}) \\
F(x, k_8) = 0{,}3730 \left(f_{x+\frac{h}{2}} + f_{x-\frac{h}{2}}\right) + 0{,}1174 \left(f_{x+3\frac{h}{2}} + f_{x-3\frac{h}{2}}\right) \\
\qquad + 0{,}0096 \left(f_{x+5\frac{h}{2}} + f_{x-5\frac{h}{2}}\right) + 0{,}0001 \left(f_{x+7\frac{h}{2}} + f_{x-7\frac{h}{2}}\right) \\
F(x, k_9) = 0{,}40635\, f_x + 0{,}2441 (f_{x+h} + f_{x-h}) + 0{,}0499 (f_{x+2h} \\
+ f_{x-2h}) + 0{,}0028 (f_{x+3h} + f_{x-3h}) + 0{,}0000 (f_{x+4h} + f_{x-4h})
\end{cases}
$$

Es liegt nun nahe, diese Formeln mit denjenigen zu vergleichen, die man erhält, wenn man von vornherein zwischen den gegebenen äquidistanten Ordinaten interpoliert, welchen Weg wir ebenfalls einschlagen wollen.

Wir beschränken uns auf den einen Fall, wo die Interpolationsfunktion f(u) von geradem Grade ist, ihre Gleichung also durch eine ungerade Zahl $m = 2n + 1$ gegebener Ordinaten bestimmt wird.

Bezeichnet x die Abszisse des auszugleichenden Wertes, so legen wir die Interpolationskurve $y = f(u)$ durch $m = 2n + 1$ Ordinatenendpunkte mit den Abszissen $x \pm vh$ $(v = 0, 1, 2, \cdots n)$. Um von dieser ganzen rationalen Funktion f(u) vom $2n$ten Grade zur Weierstraßschen Funktion F(x, k) zu gelangen, bedürfen wir nach Kap. 1 Gl. (11) nur der Differentialquotienten gerader Ordnung. Diese aber lassen sich nach den in der Einleitung

zu Kap. 2 gegebenen Formeln linear durch die geraden Differenzenquotienten ausdrücken wie folgt[1])

$$f''(x) = \frac{\Delta^2 f_{x-h}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\Delta^4 f_{x-2h}}{h^4} + \frac{h^4}{90}\frac{\Delta^6 f_{x-3h}}{h^6} - \frac{h^6}{560}\frac{\Delta^8 f_{x-4h}}{h^8} + \cdots$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{\Delta^4 f_{x-2h}}{h^4} - \frac{h^2}{6}\frac{\Delta^6 f_{x-3h}}{h^6} + \frac{7}{240}h^4\frac{\Delta^8 f_{x-4h}}{h^8} - \cdots$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{\Delta^6 f_{x-3h}}{h^6} - \frac{h^2}{4}\frac{\Delta^8 f_{x-4h}}{h^8} + \cdots$$

$$f^{(8)}(x) = \frac{\Delta^8 f_{x-4h}}{h^8} - \cdots$$

Hieraus ergibt sich

$$(16)\quad F(x, k) = f_x + \varphi_1(k)\frac{\Delta^2 f_{x-h}}{h^2} + \varphi_2(k)\frac{\Delta^4 f_{x-2h}}{h^4} + \cdots + \varphi_n(k)\frac{\Delta^{2n} f_{x-nh}}{h^{2n}},$$

wo die Funktionen $\varphi_i(k)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ ganze rationale Funktionen i-Grades der Variabeln k sind. Setzt man $y = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ so ist

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi_1(k) = \psi_1(y) = y \\ \varphi_2(k) = \psi_2(y) = y\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}h^2\right) \\ \varphi_3(k) = \psi_3(y) = y\left(\frac{y^2}{6} - \frac{h^2}{12}y + \frac{h^4}{90}\right) \\ \varphi_4(k) = \psi_4(y) = y\left(\frac{y^3}{24} - \frac{h^2}{24}y^2 + 7\frac{h^4}{480}y - \frac{h^6}{560}\right) \\ \varphi_5(k) = \psi_5(y) = y\left(\frac{y^4}{120} - \frac{h^2}{72}y^3 + \frac{13}{1440}h^4y^2 - \frac{41}{15120}h^6y + \frac{h^8}{3150}\right). \end{cases}$$

Für $m = 3$, d. i. $n = 1$ erhalten wir also

$$F(x, k) = f_x + \left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{\Delta^2 f_{x-h}}{h^2}$$

[1]) Die Bezeichnung der Differenzenquotienten ist die sonst übliche.

Setzen wir $k = k_3 = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,h$, so sehen wir, daß für diesen Wert von k die Funktion $\varphi_2(k)$ verschwindet. Mit andern Worten: Für $k = k_3$ erhalten wir denselben Wert F(x, k), ob wir die Interpolationsfunktion f(u) vom zweiten oder vom vierten Grade wählen.

Dieses Resultat steht im Einklang mit dem Gourierschen Theorien (s. § 8).

Für $m = 5$ $(n = 2)$ wird

$$F(x, k) = f_x + \varphi_1(k)\frac{\Delta^2 f_{x-h}}{h^2} + \varphi_2(k)\frac{\Delta^4 f_{x-2h}}{h^4}.$$

Setzen wir für k den Wert $k_5 = 1{,}0432\,h$ ein, so erhalten wir

$$F(x, k_5) = f_x + 0{,}2721\,\Delta^2 f_{x-h} + 0{,}0145\,\Delta^4 f_{x-2h}$$
$$= 0{,}5428\,f_x + 0{,}2141\,(f_{x+h} + f_{x-h}) + 0{,}0145\,(f_{x+2h} + f_{x-2h}).$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Ausgleichsformel von der dritten Formel des Systems (15) nur unbedeutend.

Für $m = 7$ $(n = 3)$ wird

$$F(x, k) = f_x + \varphi_1(k)\frac{\Delta^2 f_{x-h}}{h^2} + \varphi_2(k)\frac{\Delta^4 f_{x-2h}}{h^4} + \varphi_3(k)\frac{\Delta^6 f_{x-3h}}{h^6},$$

$k = k_7 = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,h$ gesetzt, ergibt sich

$$F\left(x, \tfrac{1}{2}\sqrt{6}\,h\right) = f_x + \frac{3}{8}\Delta^2 f_{x-h} + \frac{5}{128}\Delta^4 f_{x-2h} + \frac{19}{15360}\Delta^6 f_{x-3h}$$
$$= \frac{353}{768} f_x + \frac{243}{1024}(f_{x+h} + f_{x-h}) + \frac{81}{2560}(f_{x+2h} + f_{x-2h}) + \frac{19}{15360}(f_{x+3h} + f_{x-3h})$$
$$= 0{,}460\,f_x + 0{,}237\,(f_{x+h} + f_{x-h}) + 0{,}032\,(f_{x+2h} + f_{x-2h}) + 0{,}001\,(f_{x+3h} + f_{x-3h}).$$

Wie man sieht unterscheidet sich diese Ausgleichsformel von der fünften des Systems (15) ebenfalls nur unbedeutend.

In ähnlicher Weise könnte man den Fall $m = 9$ untersuchen. Überhaupt ließe sich aus der Formel (16) noch eine große Zahl spezieller Ausgleichsformeln ableiten. Die Tabelle

(14) belehrt über den günstigsten Wert des Parameters k bei einem gegebenen Grad $m - 1 = 2n$ der Interpolationsfunktion. Es ist indes kein Grund dafür abzusehen, weshalb man sich gerade streng an diese Werte halten müßte. Es liegt nichts im Wege, solche Werte für den Parameter k zu wählen, die in der Nähe jener durch die Tabelle (14) bestimmten Werte gelegen und so beschaffen sind, daß $y = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ eine rationale Zahl wird.

Solche Formeln sind etwa die folgenden

$$(18)\quad \begin{cases} F(x, h) = f_x + \frac{1}{4}\Delta^2 f_{x-h} + \frac{1}{96}\Delta^4 f_{x-2h} \\ F\left(x, \frac{2}{3}\sqrt{3}\,h\right) = f_x + \frac{1}{3}\Delta^2 f_{x-h} + \frac{1}{36}\Delta^4 f_{x-2h} \\ F(x, \sqrt{2}\,h) = f_x + \frac{1}{2}\Delta^2 f_{x-h} + \frac{1}{12}\Delta^4 f_{x-2h} + \frac{1}{180}\Delta^6 f_{x-3h}.^{1}) \end{cases}$$

Diese Formeln (18) haben den Formeln (15) gegenüber den Vorteil, daß sie mit rationalen Zahlen operieren.

Bringt man sie in die Form

$$F(x, k) = A_0 f_x + A_1 (f_{x+h} + f_{x-h}) \ldots + A_n (f_{x+nh} + f_{x-nh}),$$

so gilt auch für sie, daß die Summe der Gewichte sämtlicher Ordinaten $f_{x \pm \nu h}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots n$) gleich Eins ist, denn für die Differenzenquotienten ist die Summe der Koeffizienten ja stets gleich Null. Stehen die Werte $m = 2n + 1$ und k im richtigen Einklang, so sind auch alle Koeffizienten A positiv; negative Koeffizienten sind zu vermeiden.

Nachstehend wollen wir die letzte der Formeln (18) auf ein Beispiel anwenden (s. Czuber II S. 409, wo dieses Beispiel zu finden ist).

---

[1]) Zu den 2 letzten Formeln sollte eigentlich je noch ein Glied hinzutreten; diese Glieder haben aber beide so kleine Koeffizienten, daß sie bei jeder praktischen Berechnung außer Betracht bleiben.

Beobachtungen $H^{M(5).1}$)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Alter	Unausgegl. St. proz. satz	$\Delta^2 f_{x-h}$	$\Delta^4 f_{x-2h}$	$\Delta^6 f_{x-3h}$	$\frac{1}{2}\Delta^2 f_{x-h}$	$\frac{1}{12}\Delta^4 f_{x-2h}$	$\frac{1}{180}\Delta^6 f_{x-3h}$	Ausgegl. St. proz. satz s. 2 + 10	Abänderungen s. 6 + 7 + 8	Differenz zw. d. 3jähr. Durchschn.
20	0,51									
21	0.90	−0,18								
22	1,11	+0,39	−2,81							
23	1,71	−1,85	+5,94	−20,78	−0,925	+0,495	−0,115	1,165	−0,545	
24	0,46	+1,85	−6,09	+20,94	+0,925	−0,51	+0,116	0,991	+0,531	−0,039
25	1,06	−0,54	+2,82	−12,25	−0,27	+0,235	−0,068	0,957	−0,103	+0,119
26	1,12	−0,11	−0,52	+ 4,52	−0,055	−0,04	+0,025	1,050	−0,070	−0,078
27	1,07	−0,20	+0,66	− 2,79	−0,10	+0,055	−0,016	1,009	−0,061	−0,004
28	0,82	+0,37	−0,95	+ 2,70	+0,185	−0,08	+0,015	0,940	+0,120	+0,020
29	0,94	−0,01	+0,14	− 0,68	−0,005	+0,01	−0,004	0,941	+0,001	+0,013
30	1,05	−0,25	+0,55	− 1,19	−0,125	+0,05	−0,007	0,968	−0,082	−0,022
31	0,91	+0,06	−0,23	+ 0,88	+0,03	−0,02	+0,005	0,925	+0,015	−0,003
32	0,83	+0,14	−0,13	− 0,33	+0,07	−0,01	−0,002	0,888	+0,058	+0,032
33	0,89	+0,09	−0,36	+ 1,70	+0,045	−0,03	+0,009	0,914	+0,024	−0,003
34	1,04	−0,32	+1,11	− 3,83	−0,16	+0,09	−0,021	0,949	−0,091	+0,016
35	0,87	+0,38	−1,25	+ 4,32	+0,19	−0,10	+0,024	0,984	+0,114	
36	1,08	−0,17	+0,71							
37	1,12	−0,01								
38	1,15									

Zu dieser Wertereihe ist zu bemerken, daß sie nach Abzug einer konstanten Größe, etwa 0,9, von jedem ihrer Glieder ohne weiteres als oscillatorisch gelten kann, d. h. aber, daß wir sie, ohne sie vorher zu zerlegen, ausgleichen können.

Die Tabelle ist ohne weiteres verständlich.

Durch die beigegebene graphische Aufzeichnung (s. Tafel I) ist auch die Wirkung dieser Ausgleichung veranschaulicht. Aus der letzten Spalte 11 ersieht man, daß die Differenzen zwischen den dreijährigen Durchschnitten der gegebenen und der ausgeglichenen Wertereihe mit Ausnahme des Alters von 26 Jahren sich auf eine Stelle in der zweiten Dezimalen beschränkt.

Eine Vergleichung dieses Ausgleichsresultats mit den bei Czuber angegebenen Resultaten anderer Ausgleichsmethoden ergibt allerdings in der Hinsicht einen Unterschied, als die Ver-

[1]) Dies ist das Zeichen für jene Beobachtungen der 20 britischen Gesellschaften, welche an Personen nach 5jähriger Versicherungsdauer vorgenommen worden sind.

wischung der Schwankungen nicht so gründlich von statten geht wie bei jenen Methoden, dagegen werden nach der gegenwärtigen Ausgleichsformel die Mittelwerte besser erhalten. Ferner ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß jene stark nivellierenden Ausgleichsformeln eine viel größere Zahl benachbarter Ordinaten in die Formel einbeziehen als wie unsere Formel. Bei Karup (s. Czuber S. 408) beispielsweise sind 17 Zahlen der Originalreihe zur Ausgleichung eines einzelnen Wertes notwendig,[1]) so daß streng genommen die obige Zahlenreihe von 19 Werten eben noch zur Ausgleichung eines einzigen Wertes genügen würde.

Viertes Kapitel.

Die näherungsweise Darstellung einer aus einer Massenbeobachtung gewonnenen Funktion durch eine analytische Funktion.

Die erste Operation, die an der ursprünglich gegebenen Wertereihe vorzunehmen ist, nämlich die Zerlegung in eine gesetzmäßig verlaufende Reihe (arithmetische oder geometrische Reihe, Kap. 2) und in eine oscillatorische Restreihe, wurde im zweiten Kapitel erläutert.

Im gegenwärtigen Kapitel verbleibt uns noch die Aufgabe, die oscillatorische Restreihe näherungsweise durch eine analytische Funktion zu ersetzen.

Wir werden diese Aufgabe wiederum mit Hilfe der Weierstraßschen Funktion $F(x,k)$ zu lösen suchen.

Es bieten sich zwei Wege dar, nämlich eine Darstellung der Funktion $F(x,k)$ durch eine ganze rationale Funktion und eine andere durch trigonometrische Funktionen.

Betreffs der Darstellung durch ganze rationale Funktionen sind es wiederum die Hermiteschen Polynome, deren wir uns

---

[1]) Mit Überspringung der Werte f_{x-5h} und f_{x+5h}.

am besten bedienen. Für den Parameter k werden wir wieder solche Werte ermitteln können, daß die in die Formel einbezogenen Ordinaten der gegebenen (oscillatorischen) Funktion f näherungsweise mit einer Reihe gegebener diskreter Ordinaten zusammenfallen. Diese Werte von k werden, wie wir vorwegnehmen wollen, $\sqrt{2}$ mal kleiner als jene der Tabelle (14) in § 10. Ein bedeutender Übelstand haftet aber dieser Methode an. Wie man aus der Tabelle (14) § 10 ersieht, wächst der Parameter k nicht proportional mit der Zahl $n = \frac{m-1}{2}$, sondern viel langsamer. Um zu einigermaßen großem Werte von k und damit zu umfassenden Ausgleichungen zu gelangen, müßte also die Zahl m ganz erheblich wachsen, eine Forderung, die die Formeln weitläufig und für die Praxis unbrauchbar macht.

Der Grund für das langsame Wachstum des Parameters k bei Vergrößerung der Zahl m liegt darin, daß die ganze rationale Funktion mit unendlich wachsender Abszisse selbst unendlich groß wird, und zwar im allgemeinen um so rasanter, je höher der Grad m—1 dieser Funktion ist.

Dieser Übelstand tritt zurück, wenn wir zu einer Interpolation durch trigonometrische Funktionen übergehen.

Es fehlt uns hier aber ein bestimmter Anhalt dafür, wieviel Nachbarordinaten wir zur Ausgleichung einer bestimmten Ordinate heranziehen müssen, wenn wir dem Parameter k eine bestimmte Größe geben.

Sei (a . . . b) das Intervall, für das wir die Funktion f(u) gebildet haben, (A . . . B) dasjenige Teilintervall von (a . . . b), für das wir die Funktion F(x, k) bilden können, so ist die Größe der gleich großen Intervalle (a . . . A) und (b . . . B) von k abhängig und den Ausführungen des § 2 (1. Teil) zufolge zu bestimmen.

§ 11.

Die Entwicklung der Funktion F(x, k) nach Hermiteschen Polynomen.

Wir setzen die Entwicklung an

$$F(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n\left(\frac{x-x_0}{k}\right). \tag{1}$$

Die Formel (5) des § 8 lautet für $z = \frac{x-x_0}{k}$ wie folgt:

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(\frac{x-x_0}{k}\right) P_m\left(\frac{x-x_0}{k}\right) e^{-\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{n!} & \text{für } n = m. \end{cases}$$

Um die Koeffizienten c_n der Entwicklung (1) zu bestimmen, bilden wir in bekannter Weise das Integral

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,k) P_n\left(\frac{x-x_0}{k}\right) e^{-\left(\frac{x-x}{k}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{k^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(\frac{x-x_0}{k}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2 - \left(\frac{x-x_0}{k}\right)^2} f(u)\, du\, dx,$$

dessen Wert der letzten Formel zufolge $= \frac{c_n}{n!}$ ist.

Es ergibt sich somit

$$c_n = \frac{n!}{k^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(\frac{x-x_0}{k}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^2 - \left(\frac{u-x}{k}\right)^2} f(u)\, du\, dx.$$

Die eine Integration nach x läßt sich sofort ausführen, wenn wir für x eine neue Variable z substituieren durch

$$x = \frac{u+x_0}{2} + kz.$$

Da

$$\frac{x - x_0}{k} = z + \frac{u - x_0}{2k}, \qquad \frac{x - u}{k} = z + \frac{u - x_0}{2k},$$

$$\frac{(x - x_0)^2 + (x - u)^2}{k^2} = 2z^2 + \frac{(u - x_0)^2}{2k^2},$$

so wird

$$c_n = \frac{n!}{k^2 \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(z + \frac{u - x_0}{2k}\right) e^{-2z^2 - \frac{(u-x_0)^2}{2k^2}} f(u)\, du\, dx.$$

Wenn wir ferner für $\frac{u - x_0}{\sqrt{2}\, k}$ eine neue Variable v und

$$f(u) = f(x_0 + \sqrt{2} \cdot k \cdot v) = \varphi(v)$$

einführen, so wird

$$c_n = \frac{n! \sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(z + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) e^{-2z^2 - v^2} \varphi(v)\, dv\, dz.$$

Das auf z bezügliche Integral

$$R_n(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(z + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) e^{-2z^2} dz$$

wurde in § 9 berechnet und ergab den Wert

$$R_n(v) = \frac{P_n(v)}{(\sqrt{2})^n}. \tag{2}$$

Somit wird

$$c_n = \frac{n!}{(\sqrt{2})^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(v) \cdot \varphi(v) \cdot e^{-v^2} dv. \tag{3}$$

Die Funktion $\varphi(v)$ ersetzen wir nun näherungsweise durch eine ganze rationale Funktion $(m - 1)$ten Grades.

Setzen wir nach Gourier

$$P_n(v) \cdot \varphi(v) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{P_m(v)\, P_n(a_\mu)\, \varphi(a_\mu)}{(v - a_\mu)\, P'_m(a_\mu)}, \tag{4}$$

wo a_μ ($\mu = 1, 2, \cdots m$) die m reellen Wurzeln des m. Hermiteschen Polynoms P_m bedeuten, so haben wir den Vorteil, daß das Integral (3) für alle Werte von $n (= 0, 1, \cdots m-1)$ exakt bleibt, solange $\varphi(v)$ eine ganze rationale Funktion ist, deren Grad ν den Wert m nicht übersteigt.

Das Integral c_0 würde auch dann noch exakt bleiben, wenn $\varphi(v)$ eine ganze rationale Funktion wäre, deren Grad $\nu \leqq 2m-1$, c_1 wenn $\nu \leqq 2m-2$, allgemein c_n wenn $\nu \leqq 2m-n-1$ ist.

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$c_n = \frac{n!}{(\sqrt{2})^n \sqrt{\pi}} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{P_n(a_\mu)\,\varphi(a_\mu)}{P'_m(a_\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(v)}{v - a_\mu} e^{-v^2} dv .$$

Führen wir hierin die durch die Gleichung (7) § 8 definierte Funktion $Q_m(v)$ und die Relation (8) des § 8 ein, so erhalten wir

$$(5) \quad c_n = \frac{2^{m-1}}{m!} \cdot \frac{n!}{(\sqrt{2})^n} \sum_{\mu=1}^{m} P_n(a_\mu)\, Q^2{}_m(a_\mu)\, \varphi(a_\mu),$$

$$(n = 0, 1, \cdots m-1),$$

worin $\varphi(a_\mu) = f(x_0 + \sqrt{2}\, k\, a_\mu) \quad (\mu = 1, 2, \cdots m)$ zu setzen ist.

Hierdurch sind die Koeffizienten c_n der Entwicklung (1) als lineare Funktionen der Ordinaten $f(x_0 + \sqrt{2}\, k\, a_\mu)$ ($\mu = 1, 2 \ldots m$) dargestellt, deren Koeffizienten ein für allemal bestimmt werden können.

Die so berechneten Koeffizienten sind die folgenden:

Tabelle (6).

Für $m = 3$.

$$c_0 = \frac{4\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{6}; \; c_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}(\varphi_3 - \varphi_2); \; c_2 = -\frac{\varphi_1}{3} + \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{6}$$

Für $m = 4$.

$$c_0 = \frac{3+\sqrt{6}}{12}(\varphi_1 + \varphi_3) + \frac{3-\sqrt{6}}{12}(\varphi_2 + \varphi_4)$$

$$= 0{,}454\,(\varphi_1 + \varphi_3) + 0{,}046\,(\varphi_2 + \varphi_4);$$

$$c_1 = \frac{(3+\sqrt{6})\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{24}(\varphi_3 - \varphi_1)$$

$$+ \frac{(3-\sqrt{6})\sqrt{6+2\sqrt{6}}}{24}(\varphi_4 - \varphi_2).$$

$$= 0{,}23826\,(\varphi_3 - \varphi_1) + 0{,}07573\,(\varphi_4 - \varphi_2);$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{6}}{24}(\varphi_1 + \varphi_3) + \frac{\sqrt{6}}{24}(\varphi_2 + \varphi_4)$$

$$= 0{,}10206\,(\varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_3);$$

$$c_3 = \frac{(3+\sqrt{6})\sqrt{9-3\sqrt{6}}\,(\varphi_1 - \varphi_3) - (3-\sqrt{6})\sqrt{9+3\sqrt{6}}\,(\varphi_2 - \varphi_4)}{24}$$

$$= 0{,}29179\,(\varphi_1 - \varphi_3) - 0{,}09274\,(\varphi_2 - \varphi_4).$$

Für m = 5.

$$c_0 = \frac{8}{15}\varphi_1 + \frac{7+2\sqrt{10}}{60}(\varphi_2 + \varphi_4) + \frac{7-2\sqrt{10}}{60}(\varphi_3 + \varphi_5)$$

$$= 0{,}53333\,\varphi_1 + 0{,}22208\,(\varphi_2 + \varphi_4) + 0{,}01126\,(\varphi_3 + \varphi_5);$$

$$c_1 = \frac{(7+2\sqrt{10})\sqrt{10-2\sqrt{10}}\,(\varphi_4 - \varphi_2) + (7-2\sqrt{10})\sqrt{10+2\sqrt{10}}\,(\varphi_5 - \varphi_3)}{12}$$

$$= 0{,}21287\,(\varphi_4 - \varphi_2) + 0{,}02274\,(\varphi_5 - \varphi_3);$$

$$c_2 = -\frac{4}{15}\varphi_1 + \frac{(7+2\sqrt{10})(4-\sqrt{10})}{120}(\varphi_2 + \varphi_4)$$

$$+ \frac{(7-2\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}{120}(\varphi_3 + \varphi_5)$$

$$= -0{,}26667\,\varphi_1 + 0{,}09302\,(\varphi_2 + \varphi_4) + 0{,}04031\,(\varphi_3 + \varphi_5);$$

$$c_3 = \frac{(2+\sqrt{10})\sqrt{10-2\sqrt{10}}\,(\varphi_2 - \varphi_4) + (2-\sqrt{10})\sqrt{10+2\sqrt{10}}\,(\varphi_3 - \varphi_5)}{80}$$

$$= 0{,}1237\,(\varphi_2 - \varphi_4) + 0{,}0587\,(\varphi_5 - \varphi_3);$$

$$c_4 = \frac{2}{5}\varphi_1 - \frac{(2+\sqrt{10})(\varphi_2 + \varphi_4) + (2-\sqrt{10})(\varphi_3 + \varphi_5)}{20}$$

$$= 0{,}4\,\varphi_1 - 0{,}2581\,(\varphi_2 + \varphi_4) + 0{,}0581\,(\varphi_3 + \varphi_5).$$

Für m = 6.

$$c_0 = \quad 0{,}409\,(\varphi_1 + \varphi_4) + 0{,}088\ \ (\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}003\,(\varphi_3 + \varphi_6);$$

$$c_1 = -0{,}178\,(\varphi_1 - \varphi_4) - 0{,}118\ \ (\varphi_2 - \varphi_5) - 0{,}006\,(\varphi_3 - \varphi_6);$$

$$c_2 = -0{,}127\,(\varphi_1 + \varphi_4) + 0{,}1135\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}013\,(\varphi_3 + \varphi_6);$$

$$c_3 = \quad 0{,}234\,(\varphi_1 - \varphi_4) - 0{,}034\ \ (\varphi_2 - \varphi_5) - 0{,}024\,(\varphi_3 - \varphi_6);$$

$$c_4 = 0{,}088\,(\varphi_1 + \varphi_4) - 0{,}125\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}038\,(\varphi_3 + \varphi_6);$$
$$c_5 = -0{,}505\,(\varphi_1 - \varphi_4) + 0{,}235\,(\varphi_2 - \varphi_5) - 0{,}040\,(\varphi_3 - \varphi_6).$$

Für m = 7.

$$c_0 = 0{,}457\,\varphi_1 + 0{,}240\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}031\,(\varphi_3 + \varphi_6) + 0{,}001\,(\varphi_4 + \varphi_7);$$
$$c_1 = -0{,}196\,(\varphi_2 - \varphi_5) - 0{,}052\,(\varphi_3 - \varphi_6) - 0{,}001\,(\varphi_4 - \varphi_7);$$
$$c_2 = -0{,}229\,\varphi_1 + 0{,}040\,(\varphi_2 + \varphi_5) - 0{,}071\,(\varphi_3 + \varphi_6) + 0{,}004\,(\varphi_4 + \varphi_7);$$
$$c_3 = 0{,}164\,(\varphi_2 - \varphi_5) - 0{,}067\,(\varphi_3 - \varphi_6) - 0{,}008\,(\varphi_4 - \varphi_7);$$
$$c_4 = 0{,}343\,\varphi_1 - 0{,}193\,(\varphi_2 + \varphi_5) + 0{,}006\,(\varphi_3 + \varphi_6) + 0{,}016\,(\varphi_4 + \varphi_7);$$
$$c_5 = -0{,}169\,(\varphi_2 - \varphi_5) + 0{,}125\,(\varphi_3 - \varphi_6) - 0{,}027\,(\varphi_4 - \varphi_7);$$
$$c_6 = -0{,}857\,\varphi_1 + 0{,}622\,(\varphi_2 + \varphi_5) - 0{,}223\,(\varphi_3 + \varphi_6) + 0{,}030\,(\varphi_4 + \varphi_7).$$

Für m = 8.

$$c_0 = 0{,}3730\,(\varphi_1 + \varphi_5) + 0{,}1174\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}0096\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}0001\,(\varphi_4 + \varphi_8);$$
$$c_1 = -0{,}14\,216\,(\varphi_1 - \varphi_5) - 0{,}13\,580\,(\varphi_2 - \varphi_6) - 0{,}01\,905\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}00\,034\,(\varphi_4 - \varphi_8);$$
$$c_2 = -0{,}1323\,(\varphi_1 + \varphi_5) + 0{,}0985\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}0329\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}0009\,(\varphi_4 + \varphi_8);$$
$$c_3 = 0{,}1925\,(\varphi_1 - \varphi_5) + 0{,}0219\,(\varphi_2 - \varphi_6) - 0{,}0462\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}0024\,(\varphi_4 - \varphi_8);$$
$$c_4 = 0{,}125\,(\varphi_1 + \varphi_5) - 0{,}173\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}042\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}006\,(\varphi_4 + \varphi_8);$$
$$c_5 = -0{,}433\,(\varphi_1 - \varphi_5) + 0{,}156\,(\varphi_2 - \varphi_6) + 0{,}009\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}012\,(\varphi_4 - \varphi_8);$$
$$c_6 = -0{,}148\,(\varphi_1 + \varphi_5) + 0{,}251\,(\varphi_2 + \varphi_6) - 0{,}123\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}020\,(\varphi_4 + \varphi_8);$$

$$c_7 = 1{,}355\,(\varphi_1 - \varphi_5) - 0{,}760\,(\varphi_2 - \varphi_6) + 0{,}217\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}024\,(\varphi_4 - \varphi_8).$$

Für m = 9.

$$c_0 = 0{,}40\,635\,\varphi_1 + 0{,}2441\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}0499\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}0028\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}0000\,(\varphi_5 + \varphi_9);$$

$$c_1 = -\,0{,}1766\,(\varphi_2 - \varphi_6) - 0{,}0733\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}0063\,(\varphi_4 - \varphi_8) - 0{,}0001\,(\varphi_5 - \varphi_9);$$

$$c_2 = -\,0{,}2032\,\varphi_1 + 0{,}0058\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}08\,265\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}01\,295\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}0002\,(\varphi_5 + \varphi_9);$$

$$c_3 = 0{,}1724\,(\varphi_2 - \varphi_6) - 0{,}0481\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}0230\,(\varphi_4 - \varphi_8) - 0{,}0006\,(\varphi_5 - \varphi_9);$$

$$c_4 = 0{,}3048\,\varphi_1 - 0{,}1335\,(\varphi_2 + \varphi_6) - 0{,}0533\,(\varphi_3 + \varphi_7) + 0{,}0328\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}0017\,(\varphi_5 + \varphi_9);$$

$$c_5 = -\,0{,}2482\,(\varphi_2 - \varphi_6) + 0{,}1745\,(\varphi_3 - \varphi_7) - 0{,}0282\,(\varphi_4 - \varphi_8) - 0{,}0041\,(\varphi_5 - \varphi_9);$$

$$c_6 = -\,0{,}7619\,\varphi_1 + 0{,}5133\,(\varphi_2 + \varphi_6) - 0{,}12\,325\,(\varphi_3 + \varphi_7) - 0{,}0180\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}0089\,(\varphi_5 + \varphi_9);$$

$$c_7 = 0{,}373\,(\varphi_2 - \varphi_6) - 0{,}343\,(\varphi_3 - \varphi_7) + 0{,}125\,(\varphi_4 - \varphi_8) - 0{,}016\,(\varphi_5 - \varphi_9);$$

$$c_8 = 2{,}667\,\varphi_1 - 2{,}067\,(\varphi_2 + \varphi_6) + 0{,}934\,(\varphi_3 + \varphi_7) - 0{,}221\,(\varphi_4 + \varphi_8) + 0{,}020\,(\varphi_5 + \varphi_9).$$

In dieser Tabelle ist wieder der Bequemlichkeit halber für $\varphi(a_\mu)$ kurz φ_μ gesetzt worden.

In sämtlichen Ausdrücken c_n ($n = 1, 2, \cdots m-1$) ist die algebraische Summe der Koeffizienten gleich Null, was für die Berechnung der Koeffizienten der c_n mit geradem Index eine vorzügliche Rechnungsprobe bedeutet.

Die Werte des Parameters k bestimmen wir analog den Ausführungen zu Anfang des § 10, nämlich so, daß für gerade m $\sqrt{2}\,k\,a_1 = h$, für ungerade m $\sqrt{2}\,k\,a_1 = \frac{h}{2}$ wird, wo h den Abstand zweier gegebener diskreter Ordinaten und a_1 jeweils die dem absoluten Werte nach kleinste Wurzel des Polynoms P_m bedeutet.

Auf diese Weise wird

$$\text{für } m = 3 \quad k_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,h = 0{,}5774\,h$$

$$\text{für } m = 4 \quad k_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{12}}\,h = 0{,}6739\,h$$

$$\text{für } m = 5 \quad k_5 = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{10}}{30}}\,h = 0{,}7377\,h$$

$$\text{für } m = 6 \quad k_6 = 0{,}8107\,h$$

$$\text{für } m = 7 \quad k_7 = 0{,}8662\,h, \text{ nahezu} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h$$

$$\text{für } m = 8 \quad k_8 = 0{,}9275\,h$$

$$\text{für } m = 9 \quad k_9 = 0{,}9771\,h.$$

Wie man aus dieser Tabelle ersieht, ist das Wachstum des Parameters k bei einer Vergrößerung der ganzen positiven Zahl m, der Zahl der in die Formel (1) eingehenden Ordinaten, ein so kleines, daß selbst für große Werte von m die Stärke der Ausgleichung in bescheidenen Grenzen verbleibt. Je schwächer aber die Ausgleichung und je größer die Zahl m ist, desto mehr Glieder braucht man zur Darstellung der Funktion $F(x, k)$.

Es folgt daraus, daß dieser Weg zur näherungsweisen Darstellung größerer Intervalle der gegebenen Funktion $f(u)$ nicht beschritten werden kann. Sehr geeignet ist dagegen die Darstellung (1) zu Interpolationszwecken.

Dies wollen wir etwas weiter ausführen.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die ganze rationale Interpolationsfunktion 2n. Grades zwischen den $2n+1$ äquidistanten Ordinaten

$$f_{x_0-nh},\ f_{x_0-(n-1)h},\cdots f_{x_0-h},\ f_{x_0},\ f_{x_0+h},\cdots f_{x_0+nh},$$

auf eine von uns betrachtete Wertereihe oscillatorischer Natur angewandt, Schwankungen aufweist, die die in der Einleitung definierten Schwankungen der vorgelegten Wertereihe weit übertreffen.

Ein solches Verhalten ist für Interpolationszwecke natürlich recht ungünstig. Interpolieren wir hingegen durch die Funktion $F(x, k)$ Gl. (1), so werden diese Schwankungen vermöge der

Eigenschaft dieser Funktion, diese Schwankungen abzugleichen, in viel geringerer Stärke auftreten. Die Berechnung der interpolierten Werte ist, wenn man sich auf die Nachbarschaft des Punktes x_0 beschränkt, ungleich einfacher als wie diejenige nach der Lagrangeschen Interpolationsformel.

Die in die Formel (1) eingehenden Ordinaten können wir, soweit sie nicht mit gegebenen Ordinaten zusammenfallen, ohne Bedenken geradlinig interpolieren.

Als Nachteil der gegenwärtigen Interpolationsmethode ist hervorzuheben, daß die Interpolationskurve durch keine vorgeschriebenen Punkte hindurch geleitet werden kann, was indes bei einer ohnehin angenäherten Bestimmung der gegebenen Ordinaten wenig ins Gewicht fällt.

Die Tabelle (6) kann auch dazu benutzt werden, eine willkürlich gegebene Funktion f(x) nach Hermiteschen Polynomen zu entwickeln.

Dies wollen wir im folgenden weiter entwickeln.

Wir entwickeln die Funktion $f(x) = f\ (x_0 + \sqrt{2}\,k\,v) = \varphi(v)$ nach Hermiteschen Polynomen

$$\varphi(v) = d_0 + d_1 P_1(v) + d_2 P_2(v) + \cdots \qquad + d_{m-1} P_{m-1}(v).$$

Hierin ist

$$d_n = \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) P_n(v)\, e^{-v^2} dv \qquad (\S\ 8\ \text{Gl. (5)}).$$

Statt der Variablen v führen wir wieder die Variable x ein und erhalten

$$f(x) = d_0 + d_1 P_1\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\,k}\right) + d_2 P_2\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\,k}\right) + \cdots + d_{m-1} P_{m-1}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\,k}\right)$$

Aus der Gleichung (3) folgt aber

$$d_n = (\sqrt{2})^n c_n,$$

somit sind die Koeffizienten d_n in der Entwicklung der willkürlichen Funktion f(x) bekannte Größen.

Die Konstante k ist hierin der Länge 21 des darzustellenden Intervalls von $x_0 - 1$ bis $x_0 + 1$ proportional zu wählen,

und zwar so, daß $\sqrt{2}\,k\,a_\varrho \leqq 1$ ist, wo a_ϱ die dem absoluten Werte nach größte Wurzel des Polynoms P_m bedeutet.

Es ist noch zu bemerken (s. Kap. 2 Einl.), daß die so dargestellte Funktion f(x) gemäß der Relation (10) des § 9 in einfachster Weise differentiiert und integriert werden kann, und daß insbesondere die Differentialquotienten für den Punkt $x = x_0$ bequem sich berechnen lassen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, eine graphische Darstellung der Hermiteschen Polynome zu geben (s. Tafel II).

Jede Nullstelle irgendeines Polynoms P_m wird nach § 9 Formel (10) eine Extremalstelle des nächstfolgenden Polynoms P_{m+1}. Die Größe der Extremalwerte nimmt mit wachsender Abszisse immer mehr zu, bis schließlich von der größten Extremalstelle an die Kurven mit um so größerer Vehemenz dem Unendlichen zustreben, je höher der Grad derselben ist. Charakteristisch für die Hermiteschen Polynome ist endlich der Umstand, daß jene Extremalwerte um so kleiner werden, je höher der Grad des Polynoms ist. Bei P_8 können die drei ersten Extremalwerte schon gar nicht mehr durch den Maßstab der Zeichnung verdeutlicht werden.

Aus dem am Ende des § 10 angeführten Grunde beschäftigen wir uns zum Schluß mit der Anwendung trigonometrischer Funktionen auf unser Problem.

§ 12.

Die Entwicklung der Funktion F (x, k) nach trigonometrischen Funktionen.

Wir können die 2 n-Konstanten $a_{x_0,\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots n-1)$ und $b_{x_0,\nu}$ $(\nu = 0, 1, \cdots n)$ der Funktion

$$(8)\begin{cases} f(x-x_0) = b_{x_0,0} + a_{x_0,1}\sin(x-x_0) + a_{x_0,2}\sin 2(x-x_0) + \cdots \\ \qquad + a_{x_0,n-1}\sin(n-1)(x-x_0) \\ + b_{x_0,1}\cos(x-x_0) + b_{x_0,2}\cos 2(x-x_0) + \cdots \\ \qquad + b_{x_0,n}\cos n(x-x_0) \end{cases}$$

so bestimmen, daß für die Abszissen

$$x - x_0 = -\pi, -(n-1)\frac{\pi}{n}, -(n-2)\frac{\pi}{n}, \cdots -\frac{\pi}{n}, 0, +\frac{\pi}{n}, \cdots +\pi$$

die Funktion f(x) bezw. die Werte annimmt

$$f_{x_0-nh},\ f_{x_0-(n-1)h},\ f_{x_0-(n-2)h},\cdots f_{x_0-h},\ f_{x_0},\ f_{x_0+h},\cdots f_{x_0+nh}$$

Für den Abstand h zweier benachbarter diskreter Ordinaten $f_{x_0+\nu h}$ und $f_{x_0+(\nu+1)h}$ $(\nu = -n, -(n-1),\cdots -1, 0, 1,\cdots n-1)$ ist hierbei zu setzen der Wert $h = \frac{\pi}{n}$. Ferner muß $f_{x_0-nh} = f_{x_0+nh}$ sein.

Die Werte für die Konstanten a_ν und b_ν sowie ein für die praktische Berechnung derselben geeignetes Verfahren findet man in dem Lehrbuch von C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen § 11.

Um uns mit der Rungeschen Bezeichnung in Einklang zu befinden, bezeichnen wir die Reihe der gegebenen Ordinaten

$$f_{x_0},\ f_{x_0+h},\ f_{x_0\pm 2h},\cdots f_{x_0\pm nh},\ f_{x_0-(n-1)h},\ f_{x_0-(n-2)h},\cdots f_{x_0-h},\ f_{x_0}$$

mit

$$f_0,\ f_1,\quad f_2,\cdots\quad f_n,\quad f_{n+1},\quad f_{n+2},\cdots\quad f_{2n-1},\ f_{2n},$$

wobei $f_0 = f_{2n}$ zu setzen ist.

Ferner setzen wir $2n = r, x_a = a\frac{2\pi}{r}$; dann wird

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_a f_a \sin\beta x_a = a_\beta \frac{r}{2} \\ \sum_a f_a \cos\beta x_a = b_\beta \frac{r}{2} \end{array}\right\} \text{ für } \beta = 1, 2, \cdots \frac{r}{2} - 1$$

$$\sum_a f_a \cos\beta x_a = b_\beta \cdot r \quad \text{für } \beta = 0,\ \frac{r}{2}.$$

Dabei durchläuft a die Werte 1, 2, ⋯ r oder auch 0, 1, 2, ⋯ r — 1.

Die zu der Funktion (8) gehörige Weierstraßsche Funktion lautet nach § 4 Formeln (12) und (13):

$$(10)\quad F(x-x_0, k) = b_{x_0,0} + \left(a_{x_0,1}\sin(x-x_0) + b_{x_0,1}\cos(x-x_0)\right)e^{-\left(\frac{k}{2}\right)^2}$$
$$+ \left(a_{x_0,2}\sin 2(x-x_0) + b_{x_0,2}\cos 2(x-x_0)\right)e^{-4\left(\frac{k}{2}\right)^2} + \cdots$$
$$+ \left(a_{x_0,n-1}\sin(n-1)(x-x_0)\right.$$

$$+ b_{x_0, n-1} \cos (n-1)(x - x_0)) e^{-(n-1)^2 \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$
$$+ b_{x_0, n} \cos n (x - x_0) e^{-n^2 \left(\frac{k}{2}\right)^2}.$$

Die Gesamtlänge des Intervalls $x_0 - nh$ bis $x_0 + nh$ ist hier mit 2π bezeichnet worden; bezeichnen wir dieselbe mit $2l$, so ist statt $x - x_0$ überall $(x - x_0) \frac{\pi}{l}$ und statt k die Größe $\frac{\pi k}{l}$ zu setzen. Ferner ist $l = nh$ zu setzen.

Zur Gleichung (10) ist zu bemerken, daß sie für $k = 0$ in die Gleichung (8) übergeht. Je größer der Parameter k wird, desto mehr werden die Amplituden der einzelnen Wellen durch die e-Funktionen geschwächt, so daß sich immer ein Wert für den Parameter k angeben läßt, derart, daß die Amplituden aller Wellen von einer bestimmten Ordnung ν an so klein werden, daß sie ganz zu vernachlässigen sind. Hierzu ist eine bestimmte Annahme erforderlich über die Größe der Amplituden, die wir noch berücksichtigen wollen. Diese Annahme mag etwa darin bestehen, daß wir alle die Wellen außer acht lassen, deren Amplituden durch die Ausgleichung auf mehr als den $e^{\frac{\pi^2}{4}}$ten Teil ihres ursprünglichen Betrags reduziert werden.

Nehmen wir also an, die ν-Welle werde auf den $e^{\frac{\pi^2}{4}}$ten Teil ihres ursprünglichen Betrags reduziert, so ist

$$\frac{\nu \pi k}{2l} = \frac{\nu \cdot \pi k}{2nh} = \frac{\pi}{2},$$

also

$$\frac{k}{h} = \frac{n}{\nu}.$$

Für $\frac{k}{h} = 3$ beispielsweise wird demnach $\nu = \frac{n}{3}$, d. h. wir haben nur den dritten Teil aller n-Wellen zu berücksichtigen.

Zwei Bemerkungen sind noch anzufügen.

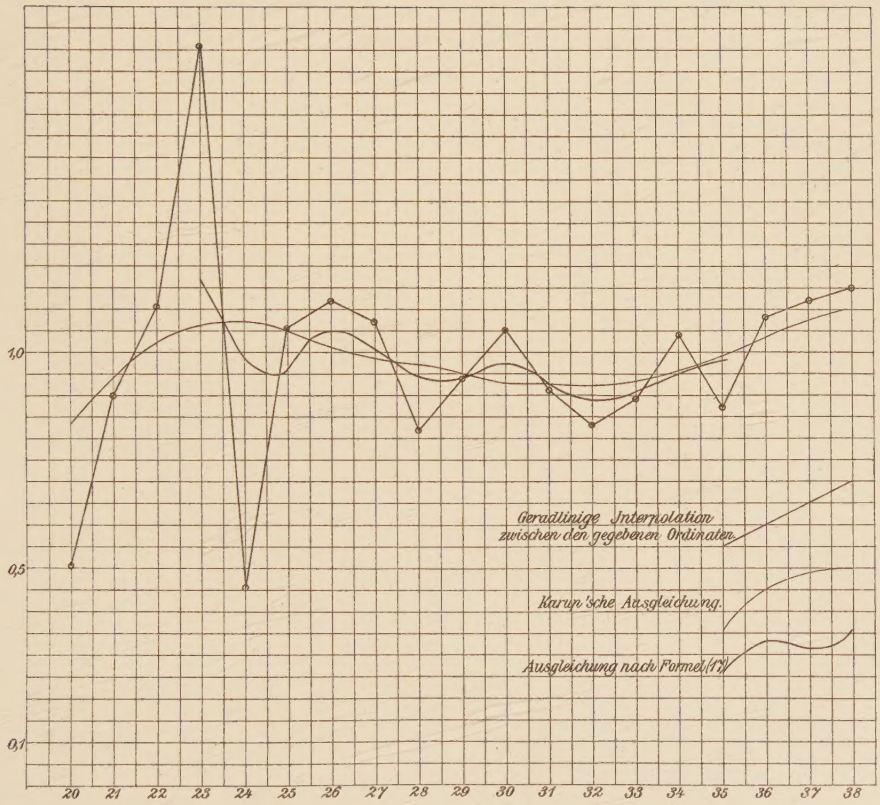
Bei der Ableitung obiger Formel (10) wurde stillschweigend angenommen, es sei $y_{x_0 - nh} = y_{x_0 + nh}$, welche Bedingung im

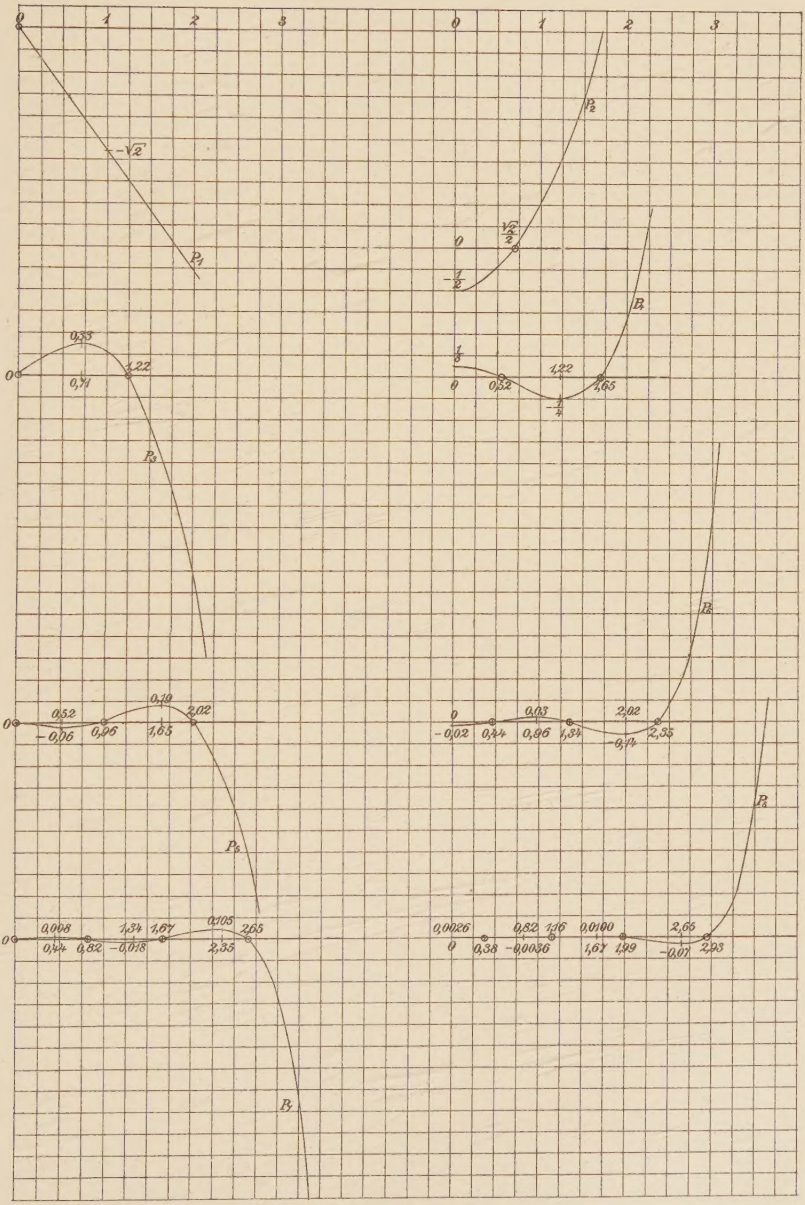
allgemeinen nicht erfüllt ist. Wir können sie aber immer dadurch erfüllen, daß wir von den Gliedern der vorgelegten oscillatorischen Wertereihe die Glieder einer arithmetischen Reihe I. Ordnung mit dem Anfangsglied $y_{y_0 - nh}$ und der konstanten ersten Differenz $\frac{y_{x_0+nh} - y_{x_0-nh}}{2n}$ subtrahieren. Die Restreihe genügt dann der obigen Bedingung.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Größe des Intervalls, für das die Funktion $F(x - x_0, k)$ beansprucht werden darf. Wir müssen mit den Enden des Intervalls, in dem die Funktion $F(x - x_0, k)$ gilt, von den Enden $x_0 - nh$ und $x_0 + nh$ einen mit der Größe von $\frac{k}{h}$ proportionalen Abstand einhalten (s. § 2 1. Teil).

Ich erfülle gern die Pflicht, dem Herrn Professor Dr. v. Brill in Tübingen für die freundliche Übernahme des Referats meinen besten Dank zu sagen, ferner bin ich Herrn Professor Dr. Maurer in Tübingen für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine mir stets gern erteilten Ratschläge zu größtem Dank verpflichtet

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.


1,0
0,5
0,1
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
Geradlinige Interpolation zwischen den gegebenen Ordinaten
Karup'sche Ausgleichung
Ausgleichung nach Formel (1)


0
1
2
3
$-\sqrt{2}$
P_1
0,33
0,74
1,22
P_3
0,52
0,19
2,02
0
-0,06
0,96
1,65
P_4
0,068
0,44
0,82
1,34
-0,018
1,67
0,005
2,65
2,35
B_1
P_2
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0
$-\frac{1}{2}$
B_2
$\frac{1}{5}$
0
0,52
1,22
1,65
$-\frac{1}{4}$
B_3
0
0,03
2,02
-0,02
0,44
0,96
1,34
2,35
-0,14
B_4
0,0026
0
0,38
0,82
1,16
-0,0036
0,0100
1,67
1,99
2,66
-0,07
2,93